VIBRAȚIILE SISTEMULUI ANTEBRAȚ- BRAȚ MODELAT SUB FORMA UNUI MODEL BIOMECANIC CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

THE VIBRATIONS OF FOREARM-UPPERARM SYSTEM MODELED AS A BIOMECANICHAL MODEL WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Marina DOGARU[1], Amelitta LEGENDI[2], Cristian PAVEL[3], Radu PANAITESCU-LIESS[4]

[1]Facultatea de Utilaj Tehnologic București, Romania
e-mail: marina.dogaru78@gmail.com
[2]Facultatea de Utilaj Tehnologic București, Romania
e-mail: amelitta.legendi@gmail.com
[3]Facultatea de Utilaj Tehnologic București, Romania
e-mail: cpcristianpavel@gmail.com
[4]Facultatea de Utilaj Tehnologic București, Romania
e-mail: pan.radu@gmail.com

Rezumat: Prezenta lucrare propune un model biomecanic cu două grade de libertate a sistemului antebraț-braț, în care articulația cotului este privită ca o bară de torsiune de masă neglijabilă. Acest model poate fi utilizat în studiul influenței fenomenelor vibratorii ce apar în timpul lucrului cu unelte percutante asupra sistemului antebraț-braț.
Astfel, putem considera două fenomene perturbatorii, unul este dat de forța *F* ce acționează în zona antebrațului (cauzată de unealta de lucru) și celălat dat de momentul rezistent *M* care apare în zona umărului lucrătorului.
Cuvinte cheie: vibrații, articulație, pulsații

Abstract: This paper proposes a 2 DoF biomechanical model of the forearm-arm system where the elbow joint is considered as negligible mass torsion bar. This model can be used in the study of the influence of vibratory phenomena occurring while working with percussion tools on the forearm-arm system.
Thus, there are two disturbing phenomena, one is given by the force *F* acting in the area of the forearm (caused by the working tool) and the other given by the resistance moment *M* which occurs in the area of the worker's shoulder.
Keywords: vibrations, joint, pulsations

1. MODELUL PROPUS

Studii referitoare la efectele vibraţiilor asupra sistemului articular au mai fost realizate în cadrul Facultății de Utilaj Tehnologic (UTCB). În [1] este prezentat un astfel de studiu comparativ, care urmărește aprecierea influenței vibrațiilor induse prin intermediul unui aparat de fitness asupra articulaţiei cotului (figura 1).

Figura 1 [1]

De asmenea, în [2] a fost realizat şi un model al sistemului mână-antebraț sub forma unui pendul simplu, articulația cotului fiind modelată sub forma unei articulații cilindrice ce conține un resort şi un amortizor rotațional (figura 2).

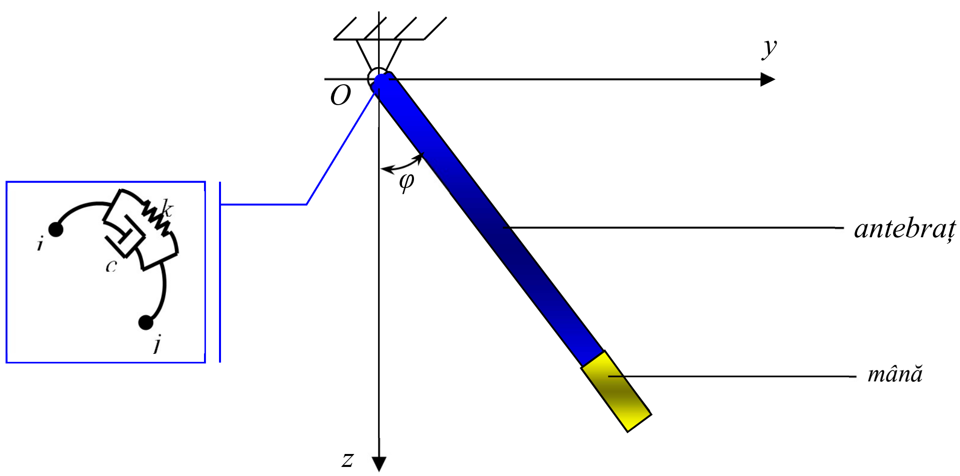

Figura 2 [2]

Sistemul antebraț-braț poate fi privit însă şi sub forma unui model cu două grade de libertate, alcătuit din două corpuri cilindrice (cu mase m_i, raze r_i, lungimi l_i), articulate prin intermediul unei bare de torsiune de masă neglijabilă (figura 3).

Considerăm modelul biomecanic propus ca fiind acționat de o forță perturbatoare F, care poate fi dată de utilizarea unui echipament de lucru portabil (de ex: bormaşină), căreia i se opune un moment rezistent M ce acționează în zona superioară a brațului (umărul lucrătorului).

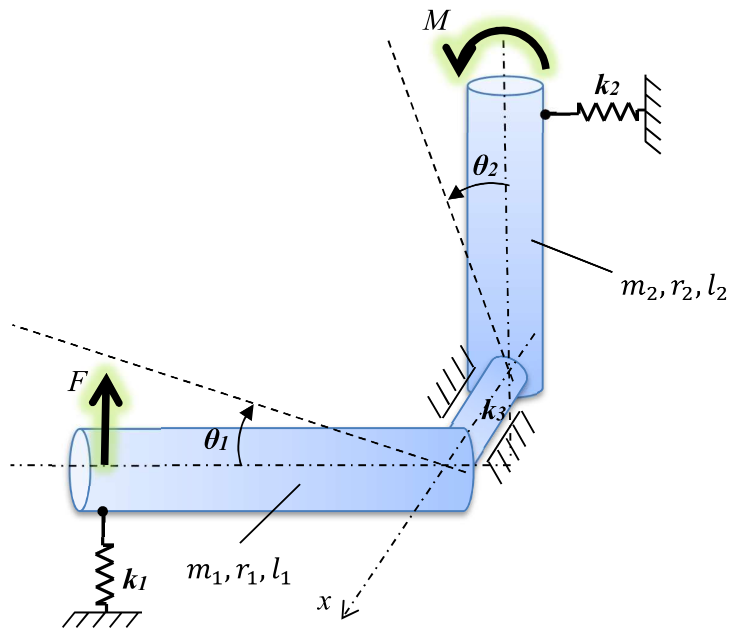

Figura 3

2. DETERMINAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII SISTEMULUI

Vom utiliza ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a. Pentru aceasta, mai întâi, vom alege coordonatele generalizate $\theta_1(t)$ și $\theta_2(t)$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_1} = Q_{1P} + Q_{1F} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial \theta_2} = Q_{2P} + Q_{2F} \end{cases} \tag{1}$$

unde: E este energia cinetică a sistemului, Q_{1P} și Q_{2P} sunt forțele restauratoare generalizate, iar Q_{1F} și Q_{2F} reprezintă forțele perturbatoare generalizate.

$$E = E_1 + E_2 \tag{2}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \left[3r_1^2 + l_1^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right] \cdot \dot{\theta}_1^2 \tag{3}$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left[3r_2^2 + l_2^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right] \cdot \dot{\theta}_2^2 \tag{4}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_1 \left[3r_1^2 + l_1^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right] \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left[3r_2^2 + l_2^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right] \cdot \dot{\theta}_2^2 \tag{5}$$

Astfel, matricea de inerție va arăta astfel:

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 \cdot \left[3r_1^2 + l_1^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right] & 0 \\ 0 & m_2 \cdot \left[3r_2^2 + l_2^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right] \end{pmatrix} \tag{6}$$

Pentru a determina forțele restauratoare generalizate $Q_{1P} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1}, Q_{2P} = -\frac{\partial V}{\partial \theta_2}$ va trebui să calculăm energia potențială a sistemului:

$$V = V_1 + V_2 + V_{arc1} + V_{arc2} + V_{arc3} \tag{7}$$

$$V_1 = m_1 \cdot g \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \theta_1 \tag{8}$$

$$V_2 = -m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \cdot (1 - cos\theta) = -m_2 \cdot g \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \frac{\theta_2^2}{2} \tag{9}$$

$$V_{arc1} = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \left(\Delta_{1\_total}^2 - \Delta_{1\_inițial}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \left[\left(\Delta_{1\_inițial} + l_1 \cdot \theta_1\right)^2 - \Delta_{1\_inițial}^2\right] = \\ = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \left(2 \cdot \Delta_{1\_inițial} \cdot l_1 \cdot \theta_1 + l_1^2 \cdot \theta_1^2\right) \tag{10}$$

$$V_{arc2} = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \left(\Delta_{2\_total}^2 - \Delta_{2\_inițial}^2\right) = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \left[\left(\Delta_{2\_inițial} + l_2 \cdot \theta_2\right)^2 - \Delta_{2\_inițial}^2\right] = \\ = \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \left(2 \cdot \Delta_{2\_inițial} \cdot l_2 \cdot \theta_2 + l_2^2 \cdot \theta_2^2\right) \tag{11}$$

$$V_{arc3} = \frac{1}{2} \cdot k_3 \cdot (\theta_1 + \theta_2)^2 \tag{12}$$

Având în vedere că în poziția inițială sistemul se consideră a fi în echilibru, rezultă că energia potențială are valoare extremă:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_2} = 0 \qquad \text{(pentru } \theta_1=0,\ \theta_2=0\text{)} \tag{13}$$

Vom obține:

$$\Delta_{1\_inițial} = -\frac{m_2 \cdot g \cdot l_2}{2}, \quad \text{respectiv } \Delta_{2\_inițial} = 0 \tag{14}$$

Rezultă că energia potențială a sistemului considerat are forma:

$$V = -\frac{m_2 g l_2}{2} \cdot \theta_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot l_1^2 \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot l_2^2 \cdot \theta_2^2 + \frac{1}{2} \cdot k_3 \cdot (\theta_1 + \theta_2)^2 \tag{15}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left[(k_1 \cdot l_1^2 + k_3) \cdot \theta_1^2 + 2 \cdot k_3 \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 + \left(-\frac{m_2 \cdot g \cdot l_2}{2} + k_2 \cdot l_2^2 + k_3\right) \cdot \theta_2^2\right] \tag{16}$$

Obținem astfel matricea de rigiditate:

$$[V] = \begin{pmatrix} k_1 \cdot l_1^2 + k_3 & k_3 \\ k_3 & -\frac{m_2 \cdot g \cdot l_2}{2} + k_2 \cdot l_2^2 + k_3 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Vom determina în continuare și forțele perturbatoare generalizate:

$$Q_{1F} = \frac{\delta L_F}{\delta_{\theta_1}} \; (\theta_2 = constant);\;\; Q_{2F} = \frac{\delta L_F}{\delta_{\theta_2}} (\theta_1 = constant) \tag{18}$$

$$Q_{1F} = \frac{F_1 \cdot \delta D_1}{\delta_{\theta_1}} = \frac{F_1 \cdot l_1 \cdot \delta\theta_1}{\delta_{\theta_1}} = F_1 \cdot l_1 \tag{19}$$

$$Q_{2F} = \frac{M_2 \cdot \delta\theta_2}{\delta_{\theta_2}} = M_2 \tag{20}$$

Vectorul amplitudinilor are forma:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \cdot l_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

În acest moment, utilizând ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a, putem scrie ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului mecanic:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \left[3r_1^2 + l_1^2 + \left(\frac{l_1}{2}\right)^2\right] \cdot \ddot{\theta}_1 + (k_1 \cdot l_1^2 + k_3) \cdot \theta_1 + k_3 \cdot \theta_2 = F_1 \cdot l_1 \cdot sin\omega t \\ m_2 \cdot \left[3r_2^2 + l_2^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2\right] \cdot \ddot{\theta}_2 + k_3 \cdot \theta_1 + \left(-\frac{m_2 \cdot g \cdot l_2}{2} + k_2 \cdot l_2^2 + k_3\right) \cdot \theta_2 = M_2 \cdot sin\omega t \end{cases} \tag{22}$$

Sistemul de ecuații (22) poate fi scris sub formă matriceală:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{H\} sin\omega t \tag{23}$$

3. DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII

Se consideră soluțiile de forma: $x = a_1 sin(pt + \beta)$, $\theta = a_2 sin(pt + \beta)$, pe care le vom înlocui în sistemul (23) rezultând:

$$[K] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - p^2 [M] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{24}$$

$$([K] - p^2[M]) \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{25}$$

Sistemul (25) are soluție nebanală dacă determinantul acestuia este nul, adică:

$$det([K] - p^2[M]) = 0 \tag{26}$$

sau altfel spus,

$$(k_{11} - m_{11} \cdot p^2) \cdot (k_{22} - m_{22} \cdot p^2) - (k_{12} - m_{12} \cdot p^2)^2 = 0 \quad (27)$$

Ecuația (26) se numește ecuația pulsațiilor proprii și va avea soluții pozitive dacă:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{\theta}_1^2} > 0; \ \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{\theta}_2^2} > 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{\theta}_1^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial \dot{\theta}_2^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{\theta}_1 \cdot \partial \dot{\theta}_2}\right)^2 > 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > 0; \ \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_2^2} > 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \cdot \partial \theta_2}\right)^2 > 0 \quad (31)$$

În final, prin rezolvarea ecuației (24), care se poate realiza extrem de simplu prin utilizarea unui software dedicat (cum ar fi Wolframalpha), se vor obține două pulsații pozitive, care reprezintă pulsațiile proprii ale sistemului considerat:

$$p_{1,2} = \frac{(k_{11} \cdot m_{22} + m_{11} \cdot k_{22} - 2 \cdot k_{12} \cdot m_{12})}{2 \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12}{}^2)} \pm$$
$$\pm \frac{\sqrt{(k_{11} \cdot m_{22} - m_{11} . k_{22} + 2 \cdot k_{12} \cdot m_{12})^2 - 4 \cdot (k_{11} \cdot k_{22} - k_{12}{}^2) \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12}{}^2)}}{2 \cdot (m_{11} \cdot m_{22} - m_{12}{}^2)} \quad (32)$$

4. CONCLUZII

Prin determinarea pulsațiilor proprii, putem să obținem în continuare, legile de mișcare și modurile proprii de vibrație, precum și reprezentarea acestora. Prin introducerea dimensiunilor antropometrice ale unui subiect putem să determinăm valorile respective, iar ulterior, prin realizarea de măsurători, să elaborăm un studiu comparativ și să apreciem calitatea modelului propus.

BIBLIOGRAFIE

[1] Panaitescu-Liess, R. – *A Comparative study about the Influence of Vibration on Elbow Joint Mobility*, Analele Universităţii "Eftimie Murgu" Reşiţa, Anul XXI, nr. 1, 2014, ISSN 1453 – 7397, p. 307-310;

[2] Panaitescu-Liess, R. - *Experimental research on the influence of vibration on elbow mobility*, Buletinul științific al Universității Tehnice de Construcții București, 2013, p. 54-59;

[3] Constantinescu, A., Pavel, C. – *Vibrații mecanice*, Editura MATRIXROM, București 2009.