UN MODEL BIOMECANIC CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE AL UNUIA DIN MEMBRELE INFERIOARE ALE ORGANISMULUI UMAN

A BIOMECANICAL MODEL WITH TWO GRADES OF FREEDOM FOR ONE OF THE LOWER MEMBERS OF THE HUMAN BODY

Marina DOGARU

Ing. – Facultatea de Utilaj Tehnologic, UTCB, Romania

Rezumat: În acest articol este prezentat un model cu două grade de libertate al membrului inferior uman pentru care se determină ecuaţia diferenţială de mișcare folosind ecuaţiile lui Lagrange de speţa a II-a.

Cuvinte cheie: biomecanică, articulaţie, ecuaţie de mișcare, model, matrice

Abstract: This article presents a two-degree model of human lower limb for which the differential motion equation is determined using the Lagrange equations of the second case.

Keywords: biomechanics, joint, motion equation, model, matrix

1. INTRODUCERE

Forţele care acţionează asupra organismului nostru și mișcările pe care le efectuăm în mod obișnuit în viaţa de zi cu zi, la locul de muncă sau în activităţile sportive fac dificilă modelarea corpului uman. Mecanica analitică reprezintă un suport neprețuit în rezolvarea acestei probleme. Desigur, tehnologia informatică și programele dedicate simulărilor ușurează cercetările atât în domeniul modelării biomecanice a organismului uman, cât și în ceea ce privește interpretarea rezultatelor.

2. MODELAREA BIOMECANICĂ A MEMBRULUI INFERIOR

Pornind de la studiul mobilității articulare a membrelor inferioare și superioare prezentat în [2], am extins modelul biomecanic al sistemului picior-gambă la întregul membru inferior. Dacă pentru scopul lucrării amintite, nu era necesar realizarea unui model complet al membrului inferior, pentru nivelul următor de cercetare și anume, studiul articulaţiilor cot şi genunchi, modelele biomecanice trebuie la rândul lor să devină mai complexe.

Masele și poziţia centrului de greutate au fost estimate într-o primă fază pentru cele trei segmente componente – coapsă, gambă și picior – pornind de la masa totală a subiectului analizat și dimensiunile segmentelor membrului inferior (prin măsurători antropometrice). [1]

Ulterior am considerat gamba și piciorul sub forma unei bare articulată la un capăt, asamblată cu o altă bară (coapsa), modelul căpătând forma unui pendul fizic dublu (figura 2), datele antropometrice fiind prezentate mai jos.

În lucrarea de față am considerat că asupra modelului acţionează două forţe perturbatoare F1 și F2, una asupra coapsei, cealaltă asupra ansamblului gambă-picior. În centrele de greutate ale barelor am poziţionat două perechi de arcuri pentru limitarea deplasării modelului și amortizarea vibratiilor.

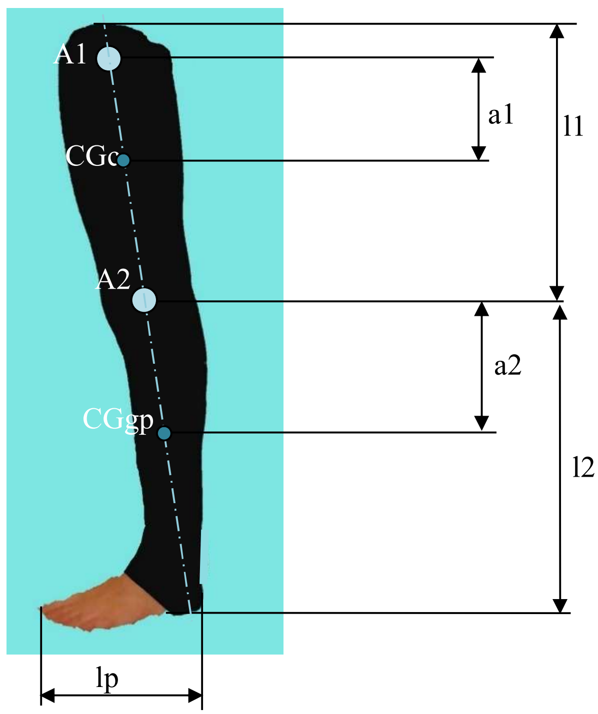

Figura 1

Masa totală: 54 kg
Masa coapsei: 5,45 kg
Masa gambei: 2,91 kg
Masa piciorului: 1,02 kg
Masa gambei şi piciorului: 3,93 kg
Înălțimea coapsei (l1):0,48 m
Înălțimea gambei: 0,40 m
Înălțimea piciorului: 0,10 m
Înălțimea gambei şi piciorului (l2): 0,50 m
Lungimea piciorului (lp): 0,24 m
Poziția CG al coapsei (a1): 0,20 m
Poziția CG al gambei și piciorului (a2): 0,20 m

A1, A2 – articulaţii
CGc – centrul de greutate al coapsei
CGgp – centrul de greutate al gambei şi piciorului

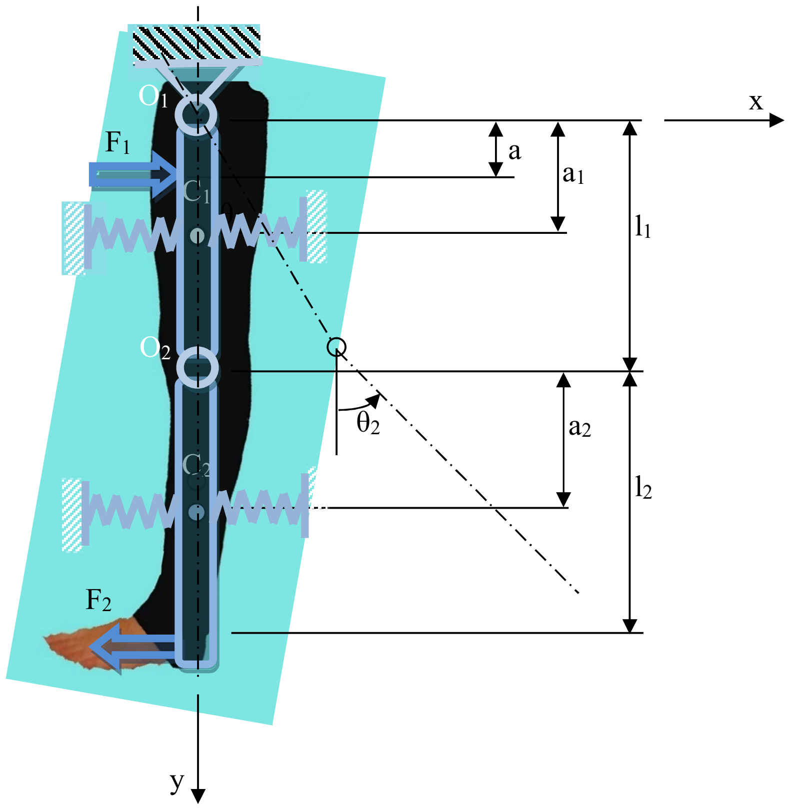

Figura 2

Coordonatele punctului C1 sunt:

$$x_{C1} = a_1 \, sin\theta_1$$

$$y_{C1} = a_1 cos\theta_1$$

Iar coordonatele punctului C2 au forma:

$$x_{C2} = l_1 sin\theta_1 + a_2 sin\theta_2$$

$$y_{C2} = l_1 cos\theta_1 + a_2 cos\theta_2$$

3. DETERMINAREA ECUAŢIEI DE MIŞCARE A MODELULUI CONSIDERAT

Pornind de la ecuaţiile lui Lagrange de speţa a II-a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_{iP} + Q_{iF} \qquad (1)$$

în care: E este energia cinetică a sistemului,

V – energia potenţială,

Q_{iP} – forţele restauratoare generalizate,

Q_{iF} – forţele perturbatoare generalizate,

q_i – coordonatele generalizate ale sistemului ($q_1=\theta_1$, $q_2=\theta 2$), urmăresc determinarea sistemului de ecuaţii diferenţiale de mişcare ale modelului considerat.

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = E_1 + E_2 + E_{C2} \tag{2}$$

unde: $E_1 = \frac{1}{2}J_{O1}\dot{\theta}_1^2$ energia cinetică a corpului 1;

$E_2 = \frac{1}{2}J_{O2}\dot{\theta}_2^2$ energia cinetică a corpului 2;

$E_{C2} = \frac{1}{2}m_2 v_{C2}^2$ energia cinetică a centrului de masă al corpului 2.

Momentele de inerţie pentru corpurile 1 și 2 sunt:

$$J_{O1} = \frac{m_1 l_1^2}{3}$$

$$J_{O2} = \frac{m_2 l_2^2}{12}$$

Pentru a determina viteza centrului de masă 2 se derivează coordonatele punctului C_2:

$$\dot{x}_{C2} = l_1\dot{\theta}_1 cos\theta_1 + a_2\dot{\theta}_2 cos\theta_2$$

$$\dot{y}_{C2} = -l_1\dot{\theta}_1 sin\theta_1 - a_2\dot{\theta}_2 sin\theta_2$$

Rezultă:

$$v_{C2}^2 = \dot{x}_{C2}^2 + \dot{y}_{C2}^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + a_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

Energia cinetică a sistemului este de forma:

$$E = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_1^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \left(\frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 a_2^2\right)\dot{\theta}_2^2 + 2m_2 l_1 a_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 cos(\theta_2 - \theta_1)\right] \tag{3}$$

$$E = \frac{1}{2}\left(m_{11}\dot{q}_1^2 + 2m_{12}\dot{q}_1\ \dot{q}_2 + m_{22}\dot{q}_2^2\right)$$

Comparând cu forma generală a energiei cinetice din literatura de specialitate [3] se pot determina termenii matricei de inerţie:

$$m_{11} = \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_1^2$$

$$m_{12} = m_{21} = m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$m_{22} = \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 a_2^2$$

Matricea de inerţie este:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) & \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Următoarea etapă este determinarea energiei potenţiale a sistemului și matricea de rigiditate.

Energia potenţială a sistemului are forma:

$$V = V_1 + V_2 + 2V_{a1} + 2V_{a2} \quad (5)$$

în care: $V_1 = m_1 g \Delta h_1$ energia potenţială a corpului 1;

$V_2 = m_2 g \Delta h_2$ energia potenţială a corpului 2;

$V_{a1} = \frac{1}{2} k(\Delta_t^2 - \Delta_{i1}^2)$ energia potenţială a arcului 1;

$V_{a2} = \frac{1}{2} k(\Delta_t^2 - \Delta_{i2}^2)$ energia potenţială a arcului 2.

Se determină deplasările Δh_1 și Δh_2:

$$\Delta h_1 = a_1(1 - cos\theta_1)$$

$$\Delta h_2 = l_1(1 - cos\theta_1) + a_2(1 - cos\theta_2)$$

iar energiile V_1 și V_2 devin:

$$V_1 = m_1 g a_1 (1 - cos\theta_1)$$

$$V_2 = m_2 g [l_1(1 - cos\theta_1) + a_2(1 - cos\theta_2)]$$

Ţinând seama de faptul că pentru valori mici ale unghiului θ este permisă substituirea $\sin\theta \approx \theta$ (în radiani), $1 - cos\theta \cong \frac{\theta^2}{2}$ și aplicând formulele binecunoscute din trigonometrie rezultă [4]:

$$V_1 = m_1 g a_1 \frac{\theta_1^2}{2} \quad (6)$$

$$V_2 = m_2 g \left(l_1 \frac{\theta_1^2}{2} + a_2 \frac{\theta_2^2}{2} \right)$$

Energia potenţială a arcurilor este:

$$V_{a1} = \frac{1}{2} k_1 (a_1^2 \theta_1^2 + 2\Delta_{i1} a_1 \theta_1) \quad (7)$$

$$V_{a2} = \frac{1}{2} k_2 [(l_1\theta_1 + a_2\theta_2)^2 + 2\Delta_{i2}(l_1\theta_1 + a_2\theta_2)]$$

în urma înlocuirii deplasării arcurilor ($\Delta_t = \Delta_{i1,2} + \delta_{1,2};\ \delta_1 = a_1\theta_1; \delta_2 = l_1\theta_1 + a_2\theta_2$).

După introducerea relaţiilor (6) și (7) în (5) se obţine energia potenţială a sistemului sub forma:

$$V = \frac{1}{2}[(m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2)\theta_1^2 + (m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2)\theta_2^2 + (4k_1 \Delta_{i1} a_1 + +4k_2 \Delta_{i2} l_1)\theta_1 + 4k_2 \Delta_{i2} a_2 \theta_2 + 4k_2 l_1 a_2 \theta_1 \theta_2] \qquad (8)$$

Derivând pe rând relaţia (8) în funcţie de θ_1 și θ_2 și aplicând condiţiile iniţiale $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$ rezultă că $\Delta_{i1,2} = 0$. Deci:

$$V = \frac{1}{2}[(m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2)\theta_1^2 + (m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2)\theta_2^2 + 4k_2 l_1 a_2 \theta_1 \theta_2] \qquad (9)$$

$$V = \frac{1}{2}(k_{11} q_1^2 + 2k_{12} q_1 q_2 + k_{22} q_2^2)$$

Comparând formula obţinută cu forma generală a energiei potenţiale din literatură [3] se pot determina termenii matricei de rigiditate:

$$k_{11} = m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2$$

$$k_{12} = k_{21} = 2k_2 l_1 a_2$$

$$k_{22} = m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2$$

Matricea de rigiditate este:

$$[K] = \begin{bmatrix} m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2 & 2k_2 l_1 a_2 \\ 2k_2 l_1 a_2 & m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Forţele perturbatoare generalizate sunt:

$$Q_{1,2F} = \frac{F_{1,2} \delta x_{1,2}}{\delta \theta_{1,2}} \qquad (11)$$

cu $\delta x_1 = a \delta \theta_1$

$$\delta x_2 = l_2 \delta \theta_2$$

$$F_{1,2} = F_{O1,2} sin\omega t$$

Matricea forţelor perturbatoare generalizate este:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} F_{O1} a \\ F_{O2} l_2 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

Pentru modelul considerat se obţin ecuaţiile diferenţiale ale sistemului mecanic considerat sub formă matriceală:

$$[M]\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + [K]\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \{H\} sin\omega t$$

$$\begin{bmatrix} \frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) & \frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2 & 2k_2 l_1 a_2 \\ 2k_2 l_1 a_2 & m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{O1} a \\ F_{O2} l_2 \end{Bmatrix} sin\omega t \quad (13)$$

și sub formă analitică:

$$\begin{cases} \left(\frac{m_1 l_1^2}{3} + m_2 l_1^2\right) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 + \\ +(m_1 g a_1 + m_2 g l_1 + 2k_1 a_1^2 + 2k_2 l_1^2)\theta_1 + \\ +2k_2 l_1 a_2 \theta_2 = F_{O1} a sin\omega t \\ \\ m_2 l_1 a_2 cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{m_2 l_2^2}{12} + m_2 a_2^2\right) \ddot{\theta}_2 + \\ +2k_2 l_1 a_2 \theta_1 + (m_2 g a_2 + 2k_2 a_2^2)\theta_2 = F_{O2} l_2 sin\omega t \end{cases} \quad (14)$$

Ținând cont de datele antropometrice, matricele M și K au următoarea formă:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1.31 & 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) \\ 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) & 0.23 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 87.77 & 19.68 \\ 19.68 & 15.9 \end{bmatrix} \quad (16)$$

iar matricea forţelor perturbatoare generalizate, pentru valorile $F_{01} = 30\ N$ respectiv $F_{02} = 20\ N$, este:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Având în vedere relaţiile (15), (16) și (17), ecuaţiile diferenţiale (13) și (14) vor fi:

-matriceal:

$$\begin{bmatrix} 1.31 & 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) \\ 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) & 0.23 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 87.77 & 19.68 \\ 19.68 & 15.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 10 \end{Bmatrix} sin30.6t \quad (18)$$

-analitic:

$$\begin{cases} 1.31 \cdot \ddot{\theta}_1 + 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \ddot{\theta}_2 + 87.77 \cdot \theta_1 + 19.68 \cdot \theta_2 = 3 \cdot sin30.6t \\ 0.37 \cdot cos(\theta_2 - \theta_1) \cdot \ddot{\theta}_1 + 0.23 \cdot \ddot{\theta}_2 + 19.68 \cdot \theta_1 + 15.9 \cdot \theta_2 = 10 \cdot sin30.6t \end{cases} \quad (19)$$

4. CONCLUZII

Se observă că, ecuaţiile de mişcare obţinute corespund vibraţiilor neliniare. Valoarea pentru $\omega = 30.6\, rad/s$ a fost adoptată din experimente anterioare [2] pentru valori ale forţelor perturbatoare $F_{01} = 30\, N$ şi $F_{02} = 20\, N$.

Îmi propun ca într-un viitor articol să determin pulsaţiile proprii şi modurile proprii de vibraţii, în cazul vibrațiilor libere neamortizate pentru sistemul cu două grade de libertate considerat.

BIBLIOGRAFIE

[1] Astașev, V. K., ș.a. – *Vibrații v Tehnike*, Tom 6, Mașinostroenie, Moskva, 1981, p. 375

[2] Panaitescu-Liess, R. – *Modelarea biomecanică a organismului uman sub acțiunea vibrațiilor*, Teza de doctorat, 2013

[3] A. Constantinescu, Cr. Pavel – *Vibraţii mecanice*, Editura MATRIXRom, ISBN 978-973-755-468-0, București, 2009

[4] Cr. Diaconu, Cr. Pavel, F. Bausic, D. Stoicescu – *Vibraţii mecanice - Teme de casă*, U.T.C.B., București, 1998

[5] I. Magheţi, M. Savu – *Vibraţii mecanice - Teorie și practică*, Editura Bren, ISBN 973-648-389-4, București, 2004

[6] Picu, A. A. – *Modelarea biomecanică neliniară a dinamicii corpului uman sub acțiunea vibrațiilor transmise* – Teză de doctorat, Galați, 2010

[7] Rancea A. - *Orteza "Comarna" pentru recuperarea traumei pe tendonul ahilian (recuperare post traumatică)* – Teză de doctorat, Iași, 2011

[8] Dasgupta, A. K., Harrison, J. - *Effects of vibration on the hand-arm system of miners in India*, Occup. Mad. Vol. 46, No. 1, p. 71-78,1996;

[9] Den Hartog, J. P. - *Mechanical Vibration*, ISBN 0-486-64785-4, Dover Publication, Inc, New York, 1985;

[10] Pavel, C., Legendi, A., Panaitescu-Liess, R. - *Optimizing the functional form of a non-linear dynamic absorber attached to a nonlinear primary oscillating structure*. In Proceedings of the XI-th Symposium Accoustics and Vibration of Mechanical Structure AVMS Timisoara. 26 mai 2011, p. 47-54. Timisoara, România. Editura Politehnica, ISSN 1843-0902 categoria B+.

[11] Fl. Bauşic, Dogaru M. – *Studii privind acţiunea vibraţiilor asupra articulaţiei genunchiului*, articol, al XXI-lea Simpozion Naţional de Utilaje pentru Construcţii SINUC 2015, 10-11 decembrie 2015, Bucureşti

[12] Legendi, A., Bausic, F., Pavel, C. – *Analiza transmisibilităţii vibraţiilor utilizate în scop terapeutic-metoda de investigaţie a structurii osoase*, SIMEC 2007, 31 martie 2007, Editura Conspress Bucuresti, ISBN 973-7797-83-3, pag. 133-136;

[13] D. M. Barbu, I. Barbu – *Modeling of Human Dynamics*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering;

[14] D. M. Barbu, I. Barbu, C. Drugă – *Theoretical Considerations Concerning the Human Body Behaviour in a Vibrational Medium*, Annals of the Oradea University, Fascicle of Management and Technological Engineering, Volume VI (XVI), 2007;

[15] V. Moşneguţu, V. Chiroiu – *Introducere în modelarea matematică a articulaţiei genunchiului*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2013