

PREZENTARE COMPARATIVĂ A UNOR CRITERII INTERACTIVE UTILIZATE ÎN MECANICA RUPERII MATERIALELOR ANIZOTROPE

A COMPARATIVE PRESENTATION OF SOME INTERACTIVE CRITERIA USED IN THE MECHANICS OF FRACTURING THE ANISOTROPIC MATERIALS

Radu I. IATAN¹, Pavel Gh. FLORESCU²

¹Prof. univ. emerit dr. ing. – Universitatea POLITEHNICA din București, Romania
e - mail: r_iatan@yahoo.com;

²Drd. ing. - Universitatea POLITEHNICA din București, Romania

Rezumat. Siguranța tehnică a structurilor mecanice este asigurată de calitatea activității de proiectare, de fabricare și de exploatare în condițiile impuse în faza de concepere. Materialele de construcție pot avea răspunsuri fidele sau discordante, în funcție de natura lor intimă, dar și din cauza unor diferențe nedorite ale valorilor parametrilor de lucru, manifestate din condiții necontrolate. Materialele izotrope sunt mai bine cunoscute, în special cele metalice, în comparație cu cele anizotrope sau ortotrope. Ca urmare, pentru precizarea vieții structurilor s-au elaborat mai multe modele fizice pentru rupere, dintre care în lucrarea de față se menționează unele dintre cele interactive, care s-au impus în practica industrială. Se reliefează diferențele dintre conținutul exprimărilor matematice corespunzătoare, care au la bază atât studii teoretice, cât și experimentări pe materiale reprezentative. Se recomandă ca folosirea unui criteriu sau altul să se adopte numai după cercetări experimentale minuțioase, cu materiale testate în condiții de lucru, chiar excesive.

Cuvinte cheie: Siguranță tehnică, criterii interactive

Abstract. The technical safety of the mechanical structures is ensured by the quality of design, manufacturing, operating and exploitation conditions in the design phase. The building materials can have accurate or discordant answers, according to their intimate nature, but also because of some unwanted differences of the working parameter values, manifested in uncontrolled conditions. The isotropic materials are better known, especially the metallic ones, compared to the anisotropic or orthotropic. Therefore, to specify the life of the structures, more physical models were developed for breaking, of which, herein mentioned, some of the most interactive, which were imposed in the industrial practice. It highlights the differences between the contents of the corresponding mathematical expressions, which are based on both theoretical studies and experiments on representative materials. It is recommended that the use of a criterion or another to be adopted only after thorough experimental research, with materials tested under working conditions, even excessive ones.

Keywords: technical safety, interactive criteria

1. INTRODUCERE

Siguranța în exploatare a structurilor mecanice realizate din materiale metalice, în general, iar a celor din materiale compozite, în special, este asigurată prin studii aprofundate cu caracter teoretic, dar și experimental. O importanță deosebită în alegerea și asigurarea practică a marjelor de siguranță îl joacă și experiența acumulată de-a lungul vremurilor, dar și al cercetărilor de laborator, efectuate în condiții dintre cele mai agresive, previzibile. Este știut că inițierea și propagarea fisurilor în cazul materialelor compozite se deosebesc de

fenomenele remarcate în cazul materialelor metalice. Fenomenologic, ruperea compozitelor reprezintă un fenomen complex, influențat de unele proprietăți structurale ale materialului, ca și de unele procese de natură mecanică [1]. Ruperea macroscopică a materialului compozit este precedată de redistribuirea tensiunilor dezvoltate în structura sollicitată mecanic sau mecano-termic, urmată de desfășurarea unui proces complex de deformare.

Pentru explicarea fenomenului de rupere a materialelor plastice sunt propuse în literatura de specialitate unele modele fizice, cu largă aplicabilitate practică, așa cum arată [2, 3], de exemplu, respectiv diverse criterii de rupere [2, 4]: al tensiunilor maxime, al deformației specifice maxime, polinomiale/tensoriale și interactive.

În cele ce urmează se face o expunere a unor expresii caracteristice criteriilor interactive, caz în care ruperea se produce atunci când este satisfăcută o formulă quadratică/pătratică a tensiunilor, precizând numai momentul ruperii, nu și modul în care se desfășoară aceasta (nu sunt descrise mecanismele de rupere).

2. EXPRIMĂRI ALE UNOR CRITERII INTERACTIVE DE RUPERE

2. 1. Criteriul Hill R. – 1 (1948).

Exprimarea matematică are în vedere lucrarea publicată în “Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 193, Issue 1033, 1948, p. 281 – 297” și se prezintă sub forma [5 - 12]:

$$f(\sigma_{ij}) = F \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + L \cdot \tau_{23}^2 + M \cdot \tau_{31}^2 + N \cdot \tau_{12}^2 \leq 1, \quad (1)$$

pentru materiale anizotrope și sollicitare spațială, astfel încât parametri F, G, H, L, M, N pot fi evaluați cu egalitățile următoare, acceptând aceleași valori ale curgerii la întindere și la comprimare [5, 6, 10 - 13]:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right); \quad G = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} \right); \quad (2)$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right); \quad L = \frac{1}{2 \cdot Q^2}; \quad M = \frac{1}{2 \cdot R^2}; \quad N = \frac{1}{2 \cdot S^2}. \quad (3)$$

Se remarcă egalitățile [5, 6, 11 - 33]:

$$(G + H) \cdot X^2 = 1; \quad (F + H) \cdot Y^2 = 1; \quad (F + G) \cdot Z^2 = 1. \quad (4)$$

Pentru $F = G = H = 1$ și $L = M = N = 3$, egalitatea (18) coincide cu criteriul **Huber – Mises – Hencky** [10].

Acceptând direcțiile principale ale tensiunilor normale (tensiunile de forfecare fiind nule) se deduce inegalitatea:

$$f(\sigma_{ij}) = F \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \leq 1. \quad (5)$$

În cazul **stării plane de tensiuni**, $\sigma_3 = \tau_{12} = \tau_{23} = 0$; $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\tau_{12} \neq 0$, astfel încât inegalitatea (6), pentru stare generală de sollicitare, se metamorfozează în [5]:

$$\frac{1}{X^2} \cdot \sigma_1^2 + \frac{1}{Y^2} \cdot \sigma_2^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \frac{1}{2 \cdot S^2} \cdot \tau_{12}^2 \leq 1. \quad (6)$$

Pentru **un laminat sau o lamină armată longitudinal cu fibre**, pentru care sunt cunoscute valorile **coeficientului Lankford** (**Lankford W. T., Snyder S. C., Bausher J. A.**, New criteria for predicting the press performance of deep drawing sheets, Transactions ASM, 42, 1950, p. 1197 – 1205) pe direcția longitudinală (de laminare sau de armare) R_L și cea transversală R_T , criteriul de siguranță la deteriorare se poate scrie [11]:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{X^2} \cdot \left[\sigma_1^2 + \frac{R_L \cdot (1 + R_T)}{R_T \cdot (1 + R_L)} \cdot \sigma_2^2 - \frac{2 \cdot R_L}{1 + R_L} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \right] \leq 1, \quad (7)$$

sau, pentru izotropia transversală ($R_L = R_T = R$):

$$f(\sigma_{ij}) = (1/X^2) \cdot \{ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - [2 \cdot R / (1 + R)] \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \} \leq 1. \quad (8)$$

În lucrarea [14] este redată următoare inegalitate pentru starea plană de tensiuni:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{X^2} \cdot \left[\sigma_1^2 + \frac{R_L + R_T}{R_T \cdot (1 + R_L)} \cdot \sigma_2^2 - \frac{2 \cdot R_L}{1 + R_L} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \frac{(2 \cdot R_{45} + 1) \cdot (R_L + R_T)}{R_T \cdot (1 + R_L)} \cdot \tau_{12}^2 \right] \leq 1, \quad (9)$$

în care R_{45} reprezintă **coeficientul Lankford** pentru caracteristicile materialului epruvetei extrase după o direcție situată la 45° în raport cu direcția de laminare/armare [11].

Notă: **Coeficientul Lankford** este definit ca măsură a anizotropiei plastice; este folosit pe scară largă ca indicator al deformabilității foilor de oțel recristalizat, cu conținut redus de carbon [11]. Exprimarea matematică a acestui coeficient se poate preciza sub formele generale [5, 11, 14]:

$$R = \varepsilon_2^p / \varepsilon_3^p = [\ln(s/s_0)] / [\ln(t/t_0)] - \text{în cazul anizotropiei uni-axiale};$$

sau, având în vedere invarianța volumului ($\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0$), pentru anizotropia bi-axială:

$$R = -\varepsilon_2^p / (\varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p) = [\ln(s/s_0)] / \{ \ln(l_0 \cdot s_0) / (l \cdot s) \},$$

unde l_0, l reprezintă lungimea inițială și cea finală (după testare) a epruvetei experimentale; s_0, s – lățimea inițială și cea finală a epruvetei; t_0, t – grosimea inițială și finală a epruvetei; $\varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p$ – deformații specifice liniare produse în lungul axei transversale pe direcția de laminare/armare și normala la planul foliei/tablei/stratificatului, în domeniul plastic de solicitare [5, 11].

2. 2. **Criteriul Gotoh M. (1977).**

Pentru materiale ortotrope, criteriul se prezintă sub forma [15]:

$$\left[\sigma_1^4 + A_2 \cdot \sigma_1^3 \cdot \sigma_2 + A_3 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 + A_4 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2^3 + A_5 \cdot \sigma_2^4 + \right. \\ \left. + (A_6 \cdot \sigma_1^2 + A_7 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + A_8 \cdot \sigma_2^2) \cdot \tau_{12}^2 + A_9 \cdot \tau_{12}^4 \right] / \sigma_c^4 = 1. \quad (10)$$

2.3. Criteriul *Hill R. – 2* (1979).

Formularea criteriului este prezentă în lucrarea publicată în „Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 85, nr. 1, 1979, p. 179 – 191”, și reprezintă o generalizare a criteriului *Hill R. – I*, scrisă sub forma [5, 11]:

$$f(\sigma_{ij}) = \left[\begin{aligned} &F \cdot |\sigma_2 - \sigma_3|^m + G \cdot |\sigma_3 - \sigma_1|^m + H \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|^m + \\ &+ L \cdot |2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + M \cdot |2 \cdot \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + \\ &+ N \cdot |2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m \end{aligned} \right] / \sigma_c^m \leq 1, \quad (11)$$

cu aceleași observații privind factorii F, G, H, L, M, N - constante de material, iar $m > 1$, rezultând o suprafață convexă care leagă tensiunile normale după direcțiile principale de anizotropie [11]; σ_c - limita de curgere la sollicitare biaxială de întindere.

Pentru **materiale cu izotropie transversală**, cu simetrie în direcțiile 1 și 2 (planul 1 – 2), când se consideră $F = G$ și $L = M$, inegalitatea (23) se modifică corespunzător [11]:

$$f(\sigma_{ij}) = \left\{ \begin{aligned} &F \cdot [|\sigma_2 - \sigma_3|^m + |\sigma_3 - \sigma_1|^m] + H \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|^m + \\ &+ L \cdot [|2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + |2 \cdot \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m] + \\ &+ N \cdot |2 \cdot \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m \end{aligned} \right\} / \sigma_c^m \leq 1. \quad (12)$$

Lucrarea [14], pentru **starea plană de sollicitare** ($\sigma_3 = 0$), ($F = G = L = M = 0$), prezintă inegalitatea:

$$f(\sigma_{ij}) = [H \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|^m + N \cdot |\sigma_1 + \sigma_2|^m] / \sigma_c^m \leq 1, \quad (13)$$

unde se iau în considerație următoarele egalități dependente de valoarea **coeficientului Lankford** [14]:

$$H = (1 + 2 \cdot R) / [2 \cdot (1 + R)]; \quad N = R / [R \cdot (1 + R)]. \quad (14)$$

În cazul unei **solicitări uniaxiale de întindere** ($\sigma_1 > 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), expresia **coeficientului Lankford** se scrie sub forma [11]:

$$R = [(2^{m-1} + 2) \cdot L - N + H] / [(2^{m-1} - 1) \cdot L + 2 \cdot N + F]. \quad (15)$$

Chu E. (Journal of Materials Processing Technology, 50, 1995, p. 207 – 215) [11] face următoarele particularizări:

Cazul I: $L = 0; H = 0;$

$$[1 / (1 + R)] \cdot [(1 + 2 \cdot R) \cdot (|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m) - R \cdot |\sigma_1 + \sigma_2|^m] / \sigma_c^m \leq 1. \quad (16)$$

Cazul II: $N = 0$; $F = 0$;

$$\frac{1}{(1 - 2^{m-1}) \cdot (1 + R)} \cdot \left\{ \left[2^{m-1} \cdot (1 - R) + (R + 2) \right] \cdot \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m - \left| 2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m - \left| 2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \right|^m \right\} / \sigma_c^m \leq 1. \quad (17)$$

Cazul III: $N = 0$; $H = 0$;

$$\frac{1}{(2 + 2^{m-1}) \cdot (1 + R)} \cdot \left\{ \left[2^{m-1} \cdot (1 - R) + (R + 2) \right] \cdot \left(\left| \sigma_1 \right|^m - \left| \sigma_2 \right|^m \right) + R \cdot \left(\left| 2 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m + \left| 2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 \right|^m \right) \right\} / \sigma_c^m \leq 1. \quad (18)$$

Cazul IV: $L = 0$; $F = 0$;

$$\frac{1}{2 \cdot (1 + R)} \cdot \left[(1 + 2 \cdot R) \cdot \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m + \left| \sigma_1 + \sigma_2 \right|^m \right] / \sigma_c^m \leq 1. \quad (19)$$

Cazul V: $L = 0$; $N = 0$;

$$\frac{1}{1 + R} \cdot \left[\left| \sigma_1 \right|^m + \left| \sigma_2 \right|^m + R \cdot \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m \right] / \sigma_c^m \leq 1. \quad (20)$$

Notă: Avantajele și dezavantajele caracteristice **criteriului Hill R. – 2** (1979) sunt precizate în lucrarea [5], conform articolelor: **Bishop J. F. W., Hill R.**, Philosophical Magazine, 42, 1951, p. 414 – 427; **Woodthorpe J., Pearce R.**, International Journal of Mechanical Sciences, 12, 1970, p. 341 – 347; **Lian J., Zhou D., Baudalet B.**, International Journal of Mechanical Sciences, 31, 1989, p. 237 – 247.

2. 4. Criteriul Hill R. – 3 (1990).

Se are în vedere lucrarea publicată în “Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 38, 1990, p. 405 – 417” și are exprimarea [5, 16]:

$$\left\{ \left| \sigma_1 + \sigma_2 \right|^m + \left(\sigma_{cb} / \tau \right)^m \cdot \left[\left| \sigma_1 - \sigma_2 \right|^m + 4 \cdot \tau_{12}^2 \right]^{m/2} + \left| \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \cdot \tau_{12}^2 \right|^{(m/2)-1} \cdot (-2 \cdot a + b) \cdot (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \right\} / (2 \cdot \sigma_{cb})^m = 1, \quad (21)$$

în care σ_{cb} reprezintă limita de curgere biaxială; τ – limita de curgere pură ($\sigma_1 = -\sigma_2$); a, b - constante de material ale căror valori pot fi stabilite cu egalități de genul [5]:

$$a = (F - G) / (F + G); \quad b = (F + G + 4 \cdot H - 2 \cdot N) / (F + G), \quad (22)$$

unde se au în vedere expresiile (2) – (3); m – exponent evaluat prin luarea în considerație unele caracteristici mecanice ale materialului și a coeficientului **Lankford** [5]:

$$m = \left\{ \ln \left[2 \cdot (R_{45} + 1) \right] \right\} / \ln (2 \cdot \sigma_{cb} / \sigma_{45}), \quad (23)$$

cu rezistența materialului epruvetei stabilită pe direcția de 45^0 în raport cu direcția de laminare/armare.

2. 5. Criteriul Montheillet F. - Jinas J. J. - Benferrah M. [1991].

Prin conținutul său, criteriul caută să descrie “anomaliile” caracteristice unor materiale policristaline, sub forma [15]:

$$f(\) = \left[c \cdot |\alpha_1 \cdot \sigma_1 + \alpha_2 \cdot \sigma_2|^m + hc \cdot |\sigma_1 - \sigma_2|^m + 2 \cdot n \cdot |\tau_{12}|^m \right] / (\sigma_c^m) = 1. \quad (24)$$

2. 6. Criteriul Hill R. – 4 (1993).

Se are în vedere lucrarea publicată în „International Journal of Mechanical Sciences, 15, 1993, p. 19 – 25”, criteriul exprimându-se prin următoarea formulă [5, 11, 14]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cL}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{cT}} \right)^2 + \left[(p + q - c) - \frac{p \cdot \sigma_1 + q \cdot \sigma_2}{\sigma_c} \right] \cdot \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_{cL} \cdot \sigma_{cT}} \leq 1, \quad (25)$$

unde s-au folosit notațiile: σ_{cL} , σ_{cT} – limita de curgere a materialului în direcția de laminare/armare, respectiv în direcție transversală (la limită se pot folosi: $\sigma_{cL} = X$; $\sigma_{cT} = Y$), p , q , c parametri de material care au relațiile de calcul [5, 11, 14]:

$$p = \left[\frac{2 \cdot R_L \cdot (\sigma_c - \sigma_{cT})}{(1 + R_L) \cdot \sigma_{cL}^2} - \frac{2 \cdot R_T \cdot \sigma_c}{(1 + R_T) \cdot \sigma_{cT}^2} + \frac{c}{\sigma_{cL}} \right] \cdot d; \quad (26)$$

$$q = \left[\frac{2 \cdot R_T \cdot (\sigma_c - \sigma_{cL})}{(1 + R_T) \cdot \sigma_{cT}^2} - \frac{2 \cdot R_L \cdot \sigma_c}{(1 + R_L) \cdot \sigma_{cL}^2} + \frac{c}{\sigma_{cT}} \right] \cdot d; \quad (27)$$

$$c = \frac{\sigma_{cL}}{\sigma_{cT}} + \frac{\sigma_{cT}}{\sigma_{cL}} - \frac{\sigma_{cL} \cdot \sigma_{cT}}{\sigma_c^2}; \quad d = \left(\frac{1}{\sigma_{cL}} + \frac{1}{\sigma_{cT}} - \frac{1}{\sigma_{cL}} \right)^{-1}. \quad (28)$$

2. 7. Criteriul Tsai S. W. – Hill R.

A fost propus în urma testării foliilor metalice laminate într-o singură direcție [16] și reprezintă o generalizare a criteriului **Huber - Mises - Hencky** pentru materiale ortotrope. Este unul dintre cele mai folosite în practică. Are la bază următoarea egalitate, la limita siguranței tehnice [2, 3, 17 - 19]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{Z} \right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 - \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \right) \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 - \\ & - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \right) \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_1 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R} \right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (29)$$

Dacă $\sigma_3 = \tau_{23} = \tau_{31} = 0$, pentru starea plană de tensiuni, egalitatea (6) devine [3, 16, 17, 19, 20]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right) \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R}\right)^2 = 1, \quad (30)$$

respectiv, în cazul izotropiei transversale ($Y = Z$), cu X și Y având aceleași valori la întindere/tracțiune și la comprimare [2, 3, 16, 21, 22]:

$$(\sigma_1 / X)^2 + (\sigma_2 / Y)^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 / X^2 + (\tau_{31} / R)^2 = 1. \quad (31)$$



Lucrarea [17] prezintă factorul care multiplică produsul ($\sigma_1 \cdot \sigma_2$) din egalitatea (30) sub următoarea formă:

$$K = \left[E_x \cdot (1 + \nu_{yx}) + E_y \cdot (1 + \nu_{xy}) \right] / \left[2 \cdot \sqrt{E_x \cdot E_y \cdot (1 + \nu_{yx}) \cdot (1 + \nu_{xy})} \right], \quad (32)$$

în care E_x , E_y reprezintă modulele de elasticitate longitudinală ale unui compozit în lungul axelor Ox și Oy ale sistemului de referință, respectiv ν_{xy} , ν_{yx} coeficienții contracției transversale, aflați în corespondența: $E_x \cdot \nu_{yx} = E_y \cdot \nu_{xy}$.

Notă: În cazul considerării unei solicitări bi-axiale cu tensiuni normale ($\sigma_3 = 0$), lucrarea [30] prezintă următoare exprimare a criteriului **Tsai S. W. – Hill R.**:

$$\left[\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R}\right)^2 \right] \cdot c_s^2 = 1, \quad (33)$$

unde c_s reprezintă un coeficient de siguranță, cu valoare supraunitară, calculat cu expresia:

$$c_s = 1 / \sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{23}}{Q}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{31}}{R}\right)^2}. \quad (34)$$

Pentru starea plană bi-axială de solicitare în cazul lemnului, ca material ortotrop, lucrarea [23] prezintă forma:

$$(\sigma_1 / X)^2 + (\sigma_2 / Y)^2 + (\tau_{12} / S)^2 = 1. \quad (35)$$

În cazul unei solicitări uni-axiale de întindere cu tensiunea σ_1 în lungul unei direcții înclinate cu unghiul θ față de cea principală, când se consideră $\sigma_1^* = \sigma_{lim}$ se deduce din (34):

$$\sigma_1^* = \left(c^4 / X^2 + s^4 / Y^2 + c^2 \cdot s^2 / S^2 \right)^{-0.5}, \quad (36)$$

unde s-au avut în vedere corelările: $\sigma_1 = \sigma_1^* \cdot c^2$; $\sigma_2 = \sigma_1^* \cdot s^2$; $\tau_{12} = \sigma_1^* \cdot c \cdot s$.

Atunci când fibrele sunt poziționate sub unghiul θ , în lungul axei Ox , în raport cu axa $O1$, pentru o lamină **solicitată uni-axial** în lungul axei 1, tensiunile normale și cea de forfecare se transformă, ținând seama de corelările adecvate [3, 16, 21, 23]:

$$\sigma_1 = \sigma \cdot c^2; \quad \sigma_2 = \sigma \cdot s^2; \quad \tau_{12} = -\sigma \cdot s \cdot c, \quad (37)$$

unde $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$.

În această stare ecuația criteriului **Tsai S. W. – Hill R.** capătă forma [21]:

$$c^4/X^2 + (1/S^2 - 1/X^2) \cdot c^2 \cdot s^2 + s^4/Y^2 = 1/(\sigma_1)^2. \quad (38)$$

În egalitățile anterioare nu se poate face distincție între comportările materialului la întindere și la comprimare. Tensiunile limită pentru cele două tipuri de solicitări, totuși, sunt diferite pentru cele mai multe materiale compozite.

Notă: În egalitățile anterioare se va ține seama de tipul de solicitare, introducându-se, în acest fel, valorile adecvate ale tensiunilor limită, cu semnele lor algebrice.

2. 8. Criteriul **Hoffman O.** (1967).

Reprezintă o generalizare a criteriului **Hill R.**, considerând rezistențe/tensiuni diferite la întindere și la comprimare, scris sub forma [2, 9, 21, 24 - 26]:

$$H_1 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + H_2 \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H_3 \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H_4 \cdot \sigma_1 + H_5 \cdot \sigma_2 + H_6 \cdot \sigma_3 + H_7 \cdot \tau_{12}^2 + H_8 \cdot \tau_{23}^2 + H_9 \cdot \tau_{31}^2 = 1, \quad (39)$$

în structura căreia se remarcă prezența a nouă constante H_i ($i = 1 \dots 9$) și valori diferite ale tensiunilor de rupere la tracțiune și comprimare. Evaluarea factorilor H_i se poate face printr-o încercare la tracțiune uni-axială și una la comprimare, respectiv trei teste de forfecare [21, 27].

Lucrarea [24] prezintă următoarele expresii pentru factorii H_i :

$$H_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{X_T \cdot X_C} + \frac{1}{Y_T \cdot Y_C} - \frac{1}{Z_T \cdot Z_C} \right); H_4 = -\frac{X_T - X_C}{X_T \cdot X_C}; H_7 = \frac{1}{S^2}; \quad (40)$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{Z_T \cdot Z_C} + \frac{1}{Y_T \cdot Y_C} - \frac{1}{X_T \cdot X_C} \right); H_5 = -\frac{Y_T - Y_C}{Y_T \cdot Y_C}; H_8 = \frac{1}{Q^8}; \quad (41)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{X_T \cdot X_C} + \frac{1}{Z_T \cdot Z_C} - \frac{1}{Y_T \cdot Y_C} \right); H_6 = -\frac{Z_T - Z_C}{Z_T \cdot Z_C}; H_9 = \frac{1}{R^2}. \quad (42)$$

În cazul general în care $H_1 = H_2 = H_3 = H_7 = H_8 = H_9$, respectiv $H_4 = H_5 = H_6 = 0$, criteriul lui **Hoffmann O.** se prezintă sub forma unui paraboloid eliptic [24].

Pentru un **material ortotrop**, sub acțiunea unei **stări plane de tensiuni**, ($\tau_{31} = \tau_{32} = \sigma_3 = 0$) exprimarea arată astfel [2, 21, 36]:

$$\frac{\sigma_1 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)}{X_T \cdot X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T \cdot Y_C} + \frac{X_C - X_T}{X_T \cdot X_C} \cdot \sigma_1 + \frac{Y_C - Y_T}{Y_T \cdot Y_C} \cdot \sigma_2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 = 1. \quad (43)$$

Tensiunea maximă de încărcare a laminei, pentru ca cedarea să nu se producă în cazul unei stări plane de solicitare uni-axială, se scrie sub forma [28]:

$$\sigma_x \leq X_T \cdot Y_T \cdot S / \sqrt{M + N + P}, \quad (44)$$

cu:

$$M = (r^2 \cdot X_T^2 - r \cdot Y_T^2 + Y_T^2) \cdot S^2 \cdot c^4; \quad N = (r^2 \cdot Y_T^2 - r \cdot X_T^2 + X_T^2) \cdot S^2 \cdot s^4; \quad (45)$$

$$P = Y_T^2 \cdot (r - 1)^2 \cdot (X_T^2 - S^2) \cdot c^2 \cdot s^2, \quad (46)$$

unde este prezent raportul r , pentru **solicitarea biaxială de întindere**. Pentru comprimare se înlocuiesc rezistențele X_T, Y_T cu cele corespunzătoare cazului, X_C, Y_C .

În cazul unei **solicitări uniaxiale**, de comprimare sau de întindere, păstrându-se notațiile cunoscute se are în vedere expresia [21]:

$$\sigma_x = \frac{X_T \cdot Y_T \cdot S}{\sqrt{X_T^2 \cdot S^2 \cdot s^4 + Y_T^2 \cdot S^2 \cdot c^4 + Y_T^2 \cdot (X_T^2 - S^2) \cdot c^2 \cdot s^2}}. \quad (47)$$

Notă: În expresiile corespunzătoare, tensiunile de întindere sunt pozitive, iar cele de comprimare, negative.

2. 9. Criteriul *Franklin H. G.* (1968).

Acesta modifică criteriul lui *Marin J.* (1957), pentru diminuarea limitării acestuia. Teoria de rupere, general valabilă în proiectare, trebuie să includă efectele comportării neliniare, atunci când aceasta se produce, ca și efectele cauzate de diferența dintre rezistența la tracțiune/întindere și cea la comprimare. Ca urmare, se scrie [2]:

$$K_{1F} \cdot \sigma_1^2 + K_{2F} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 + K_{3F} \cdot \sigma_2^2 + K_{4F} \cdot \sigma_1 + K_{5F} \cdot \sigma_2 + K_{6F} \cdot \tau_{12} = 1, \quad (48)$$

unde factorii K_{1F} și K_{4F} sunt determinați în urma unor încercări monoaxiale pe prima direcție de ortotropie ($\sigma_1 = X_C; \sigma_2 = X_T$), în timp ce K_{3F} și K_{5F} se determină prin încercări monoaxiale pe a doua direcție de ortotropie, respective o încercare de forfecare ($\tau_{12} = S$). Acest criteriu pare mai precis, comparativ cu alte criterii, însă din cauza lui K_{2F} prezintă inconvenientul cerinței de realizare a unei încercări biaxiale pentru determinarea valorii sale [2].

2. 10. Criteriul *Hashin Z. – Rotem A. A.* (1973) [11]

Se face distincție între deficitul de fibre sau de matrice.

- Deteriorarea fibrelor la întindere ($\sigma_1 > 0$) se consideră a se produce la $\sigma_1 = X_T$ sau la comprimare/compresiune ($\sigma_1 < 0$), dacă $(-\sigma_1) = X_C$.

Notă: În lucrările [15, 22] se precizează următoarea egalitate pentru cazul evitării deteriorării fibrelor solicate la întindere (*Hashin Z.* – 1980):

$$(\sigma_1 / X_T)^2 + \left[(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) / S^2 \right] \leq 1 \quad \text{sau} \quad \sigma_1 = X_T, \quad (49)$$

în timp ce în cazul comprimării fibrelor [28]:

$$\sigma_1^2 / X_c^2 \leq 1. \quad (50)$$

Lucrarea [34] expune forma următoare pentru cazul rîvîtării deteriorării fibrelor:

$$(\sigma_1 / X_T)^2 + (\tau_{12} / S)^2 + (\tau_{13} / R)^2 \leq 1, \quad (51)$$

astfel încât pentru $S = R$ se stabilește exprimarea (49).

- Deteriorarea matricei la întindere ($\sigma_2 > 0$) se produce când [21, 25, 28, 29]:

$$(\sigma_2 / Y_T)^2 + (\tau_{12} / S)^2 = 1. \quad (52)$$

- Deteriorarea matricei la comprimare/compresiune ($\sigma_2 < 0$) se produce când [21, 29]:

$$(\sigma_2 / Y_C)^2 + (\tau_{12} / S)^2 = 1. \quad (53)$$

Notă: În lucrările [30, 31] se prezintă următoarele exprimări pentru funcțiile care definesc:

Deteriorarea fibrelor la întindere se poate produce atunci când [30]:

$$F_f^T = (\sigma_1 / X_T)^2 + \alpha \cdot (\tau_{12} / S)^2 = 1; \quad (54)$$

Observație: Factorul $\alpha = 0$, conform *Hashin Z. – Rotem A. A.* (1973), respectiv $\alpha = 1$, conform *Hashin Z.* (1980) [25, 30, 31].

Deteriorarea fibrelor la comprimare se poate produce atunci când [28, 30, 31]:

$$F_f^T = (\sigma_1 / X_C)^2 = 1; \quad (55)$$

Deteriorarea matricei la întindere se poate produce atunci când [30, 31]:

$$F_m^T = (\sigma_2 / Y_T)^2 + (\tau_{12} / S)^2 = 1; \quad (56)$$

Deteriorarea matricei la comprimare se poate produce atunci când [25, 30, 31]:

$$F_m^C = (\sigma_2 / S_T)^2 / 4 + [(Y_C / S_T)^2 / 4 - 1] \cdot (\sigma_2 / Y_C) + (\tau_{12} / S)^2 = 1. \quad (57)$$

Observație: În egalitățile anterioare S_T reprezintă tensiunea de forfecare transversală, ca valoare maximă, pe care o poate atinge tensiunea τ_{23} . Pentru celelalte tensiuni τ_{12} , τ_{13} valoarea limită la forfecare se va considera S .

Hashin Z. (1980) [21] a încercat dezvoltarea criteriului de mai sus și în cazul tridimensional, cu dificultatea stabilirii unui plan de cedare. Ca urmare, a păstrat contribuția quadratică a tensiunilor și a admis ipoteza că orice plan de cedare posibilă este situat paralel cu fibrele, astfel încât tensiunea σ_1 nu intervine în calcul. Noile expresii au formele [21, 29]:

- Deteriorarea matricei la întindere $[(\sigma_2 + \sigma_3) > 0]$ se produce când [21, 29]:

$$(\sigma_2 + \sigma_3)^2 / Y_T^2 + (\tau_{23}^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3) / S_T^2 + (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) / S^2 = 1. \quad (58)$$

- Deteriorarea matricei la comprimare $\left[(\sigma_2 + \sigma_3) < 0 \right]$ se produce când [18, 21, 29]:

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_c} \cdot \left[\left(\frac{Y_c}{2 \cdot S_T} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2 \cdot S_T} \right)^2 + \frac{1}{S_T^2} \cdot (\tau_{23}^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3) + \frac{1}{S^2} \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) = 1. \quad (59)$$

Pentru cedarea matricei la comprimare, termenul liniar este menținut, impunându-se condiția ca materialul să cedeze sub presiune izotropică ($\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma$), aceasta putând atinge valori mult mai mari decât rezistența la rupere prin comprimare uniaxială, Y_c . Influența prezenței acestui termen nu este încă clară în privința posibilității de a prezice alte tipuri de rupere [21]. În egalitățile (58) și (59), S_T reprezintă rezistența la forfecare transversală, ca valoare maximă pe care o poate atinge tensiunea τ_{23} . Pentru tensiunile τ_{12} și τ_{13} valoarea limită a rezistenței la forfecare este S [21].

Notă: Lucrarea [18], nefăcând diferențierea între tensiunile S_T și S - așa cum s-a menționat anterior -, prezintă următoarele exprimări:

- Deteriorarea matricei la întindere $\left[(\sigma_2 + \sigma_3) > 0 \right]$ se produce când:

$$\left[(\sigma_2 + \sigma_3) / Y_T \right]^2 + (\tau_{23}^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3) / R^2 + (\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2) / S^2 = 1. \quad (60)$$

- Deteriorarea matricei la comprimare $\left[(\sigma_2 + \sigma_3) < 0 \right]$ se produce când [18, 29]:

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{Y_c} \cdot \left[\left(\frac{Y_c}{2 \cdot R} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2 \cdot R} \right)^2 + \frac{\tau_{23}^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_3}{R^2} + \frac{\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2}{S^2} = 1. \quad (61)$$

2. 11. Criteriul *Brewer C. J. – Lagace A. P.* (1988) [32].

În cazul unor stratificate, delaminarea se poate produce atunci când:

$$\left(\tau_{13} / Q \right)^2 + \left(\tau_{23} / R \right)^2 + \left(\sigma_3 / Z_T \right)^2 = 1, \text{ dacă } \sigma_3 \geq 0, \quad (62)$$

respectiv:

$$\left(\tau_{13} / Q \right)^2 + \left(\tau_{23} / R \right)^2 + \left(\sigma_3 / Z_T \right)^2 = 1, \text{ dacă } \sigma_3 \leq 0. \quad (63)$$

Notă: Criteriul este susținut și de *Sun T. C. – Zhou G. S.* (1988) [32], în forma (62), fără a face precizare asupra semnului tensiunii σ_3 .

În lucrarea [25] sunt expuse următoarele forme ale criteriului *Brewer C. J. – Lagace A. P.* (a se vedea lucrarea autorilor menționați, publicată în *Journal of Composite Materials*, 22, nr. 12, 1988, p. 1141 – 1155):

$$\left(\sigma_3 / Z_T \right)^2 + \left[(\tau_{13} + \tau_{23}) / S_d \right]^2 = 1, \quad (64)$$

dacă $\sigma_3 \geq 0$, respectiv:

$$\left[(\tau_{13} + \tau_{23} - 8 \cdot \sigma_3) / S_d \right]^2 = 1, \quad (65)$$

atunci când: $-\sqrt{(\tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)/8} \leq \sigma_3 < 0$, S_d reprezentând tensiunea de forcare cu aceeași valoare în planurile 1-3 și 2-3.

2. 12. Criteriul *Chu E.* (1995).

Elaborat prin intermediul lucrării publicate în “Journal of Materials Processing Technology, 50, 1995, p. 207 – 215, criteriul exprimă o altă versiune a criteriului *Hill R.* – 2 (1979), pentru starea plană de tensiuni, sub forma [14]:

$$f(\sigma_{ij}) = \left\{ C \cdot |\sigma_1 + B \cdot \sigma_2|^m + H \cdot [(\sigma_1 - B \cdot \sigma_2)^2 + (2 \cdot D \cdot \tau_{12})^2]^{m/2} \right\} / \sigma_c^m \leq 1, \quad (66)$$

unde s-au notat:

$$C = 0,5 \cdot \left(1 - \sqrt{[R_L \cdot R_T / (1 + R_L)]} \right); \quad (67)$$

$$H = 0,5 \cdot \left(1 + \sqrt{[R_L \cdot R_T / (1 + R_L)]} \right) = 1 - C; \quad (68)$$

$$B = \sqrt{[R_L \cdot (1 + R_T)] / [R_T \cdot (1 + R_L)]}; \quad (69)$$

$$D = 0,5 \cdot \left[C \cdot |1 + B|^m \cdot (2 \cdot R_{45} + 1) / H \right]^{1/m}, \quad (70)$$

cu semnificațiile prezentate în cele ce preced pentru mărimile inserate.

2. 13. Criteriul *Liu C. - Huang Y. - Stout M. G.* (1997).

Acesta propune modificarea criteriului *Hill R.*, pentru o stare spațială de solicitare, sub forma (Acta Materialia, 45, 1997, p. 2397 – 2406):

$$\left\{ F \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot L \cdot \tau_{23}^2 + 2 \cdot M \cdot \tau_{31}^2 + 2 \cdot N \cdot \tau_{12}^2 \right\}^{1/2} + I \cdot \sigma_1 + J \cdot \sigma_2 + K \cdot \sigma_3 = 1, \quad (71)$$

unde sunt prezenți factorii de material [33].

2. 14. Criteriul *Aretz H.* (2005).

Formularea matematică este exprimată în “Journal Processing Technology, 168, 2005, p. 1 – 9”, pentru o stare plană de tensiuni [12]:

$$f(\sigma_{ij}) = \left[|\sigma_1^*|^m + |\sigma_2^*|^m + |\sigma_1^* - \sigma_2^*|^m \right] / (2 \cdot \sigma_c^m) \leq 1, \quad (72)$$

unde:

$$\sigma_1^* = (a_8 \cdot \sigma_1 + a_1 \cdot \sigma_2) / 2 + \sqrt{[(a_2 \cdot \sigma_1 - a_3 \cdot \sigma_2) / 2]^2 + a_4 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{21}}; \quad (73)$$

$$\sigma_2^* = (a_8 \cdot \sigma_1 + a_1 \cdot \sigma_2) / 2 - \sqrt{[(a_2 \cdot \sigma_1 - a_3 \cdot \sigma_2) / 2]^2 + a_4 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{21}}; \quad (74)$$

$$\sigma_1^{**} = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2 + \sqrt{\left[(a_5 \cdot \sigma_1 - a_6 \cdot \sigma_2) / 2 \right]^2 + a_7 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{21}} ; \quad (75)$$

$$\sigma_2^{**} = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2 - \sqrt{\left[(a_5 \cdot \sigma_1 - a_6 \cdot \sigma_2) / 2 \right]^2 + a_7 \cdot \tau_{12} \cdot \tau_{21}} , \quad (76)$$

exponentul m și factorii a_i ($i = 1, 8$) determinându-se prin teste mecanice adecvate [12].

Observație: Pentru $a_1 = a_2 = \dots = a_8 = 1$ și $m = 2$ se distinge criteriul **Huber – Mises – Hencky** [12].

2. 15. Criteriul Cai J. X. – Xu O. J. (2015) [34].

În cazul unei structuri formată din două straturi lipite perfect, pentru o **stare plană de deformare**, se prezintă următoarea expresie (axe de referință $Ox \equiv 1$ și $Oy \equiv 2$ se află în planul de lipire, iar $Oz \equiv 3$ în plan normal):

$$\left(\frac{\sigma_3}{Z} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{13}}{R} \right)^2 + \frac{F_1 \cdot \sigma_{11}^2 + F_2 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_3}{Z^2} + \frac{F_3 \cdot \sigma_3^2 + F_4 \cdot \sigma_{11}^2 + F_5 \cdot \sigma_{11} \cdot \sigma_3}{R^2} = 1, \quad (77)$$

unde σ_{11} reprezintă aici tensiunea normală dezvoltată în lungul axei $Ox \equiv 1$, în stratul 1. Celelalte mărimi au expresiile [34]:

$$F_1 = C_2^* / C_1^*; \quad F_2 = C_3^* / C_1^*; \quad F_3 = D_1^* / D_4^*; \quad F_4 = D_2^* / D_4^*; \quad F_5 = D_3^* / D_4^*; \quad (78)$$

$$C_1^* = \frac{(1 - 2 \cdot \nu_1) \cdot (1 + \nu_1)^2}{12 \cdot E_1} + \frac{(1 - 2 \cdot \nu_2) \cdot (1 + \nu_2)^2}{12 \cdot E_2} \cdot \left(1 - \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot f_{12} \right)^2; \quad (79)$$

$$C_2^* = \frac{(1 - 2 \cdot \nu_1) \cdot (1 + \nu_1)^2}{12 \cdot E_1} + \frac{(1 - 2 \cdot \nu_2) \cdot E_2}{12 \cdot (1 - \nu_2^2)} \cdot \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \right)^2; \quad (80)$$

$$C_3^* = \frac{(1 - 2 \cdot \nu_1) \cdot (1 + \nu_1)^2}{6 \cdot E_1} + \frac{(1 - 2 \cdot \nu_2) \cdot (1 + \nu_2)}{6 \cdot (1 - \nu_2)} \cdot \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \cdot \left(1 - \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot f_{12} \right); \quad (81)$$

$$D_1^* = \frac{(1 + \nu_1) \cdot (1 - \nu_1 + \nu_1^2)}{6 \cdot E_1} + \frac{(1 + \nu_2) \cdot (1 - \nu_2 + \nu_2^2)}{6 \cdot E_2} \cdot \left[1 + \left(\frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \right)^2 \cdot f_{12}^2 \right]; \quad (82)$$

$$D_2^* = \frac{(1 + \nu_1) \cdot (1 - \nu_1 + \nu_1^2)}{6 \cdot E_1} + \frac{E_2 \cdot (1 + \nu_2) \cdot (1 - \nu_2 + \nu_2^2)}{6 \cdot (1 - \nu_2^2)^2} \cdot \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \right)^2; \quad (83)$$

$$D_3^* = - \frac{(1 + \nu_1) \cdot (1 + 2 \cdot \nu_1 - 2 \cdot \nu_1^2)}{6 \cdot E_1} - \frac{1 - \nu_2 + \nu_2^2}{3 \cdot (1 - \nu_2)} \cdot \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \cdot f_{12} - \frac{1 + 2 \cdot \nu_2 - 2 \cdot \nu_2^2}{6 \cdot (1 - \nu_2)} \cdot \frac{1 - \nu_1^2}{E_1}; \quad (84)$$

$$D_4^* = \frac{1 + \nu_1}{2 \cdot E_1} + \frac{1 + \nu_2}{2 \cdot E_2}; \quad f_{12} = \frac{\nu_1 \cdot (1 + \nu_1)}{E_1} - \frac{\nu_2 \cdot (1 + \nu_2)}{E_2}. \quad (85)$$

La baza stabilirii egalității (77) s-a avut în vedere egalitatea:

$$E_V / E_{Vc} + E_F / E_{Fc} = 1, \quad (86)$$

în care E_V , E_F reprezintă cantitățile energetice necesare modificării unui element de volum și de schimbare a formei, respective valorile critice, caracteristice cazurilor. De notat, totodată, că se au în vedere egalitățile de echilibru [34]:

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = \sigma_z; \quad (\tau_{13})_1 = (\tau_{13})_2 = \tau_{13}; \quad (\tau_{23})_1 = (\tau_{23})_2 = \tau_{23}, \quad (87)$$

respectiv:

$$\sigma_{11} / E_1 - \nu_1 \cdot (\sigma_{21} + \sigma_3) / E_1 = \sigma_{12} / E_2 - \nu_2 \cdot (\sigma_{22} + \sigma_3) / E_2; \quad (88)$$

$$\sigma_{21} / E_1 - \nu_1 \cdot (\sigma_{11} + \sigma_3) / E_1 = \sigma_{22} / E_2 - \nu_2 \cdot (\sigma_{12} + \sigma_3) / E_2; \quad (89)$$

$$(\tau_{12})_1 / G_1 = (\tau_{12})_2 / G_2, \quad (90)$$

în care: σ_{11} , σ_{12} – tensiunile normale orientate în lungul axei Ox , caracteristice stratului 1 și 2; σ_{21} , σ_{22} – tensiunile normale orientate în lungul axei Oy , caracteristice straturilor 1 și 2; $(\tau_{12})_1$, $(\tau_{12})_2$ – tensiunile de forfecare caracteristice celor două straturi; G_1 , G_2 , ν_1 , ν_2 – modulele de elasticitate de forfecare și coeficienții contracției transversale aparținând celor două materiale ale straturilor lipite. Din cele de mai sus se remarcă: $(\tau_{12})_1 \neq (\tau_{12})_2$; $\sigma_{11} \neq \sigma_{12}$; $\sigma_{21} \neq \sigma_{22}$. În condițiile stării plane de deformății acceptate pentru deducerea expresiilor anterioare, se mai precizează [34]:

$$\sigma_{21} = \nu_1 \cdot (\sigma_{11} + \sigma_z); \quad \sigma_{22} = \nu_2 \cdot (\sigma_{12} + \sigma_z); \quad \tau_{12} = \tau_{23} = 0. \quad (91)$$

3. CONCLUZII

Prin consultarea unor surse bibliografice reprezentative, autorii lucrării de față expun mai multe criterii care permit prognozarea solicitărilor maxime și a duratei de viață a structurilor mecanice realizate din materiale anizotrope, în condițiile unor prezumtive deteriorări prin rupere. Unele dintre exprimările matematice se pot aplica și în cazul laminatelor din materiale izotrope, la care anizotropia sau ortotropia se manifestă după parcurgerea operațiilor tehnologice specifice. Comparând conținutul formal al criteriilor se disting cazurile practice unde pot fi valorificate, cu recomandarea de a se lua în discuție caracteristici ale materialelor, stabilite experimental, pentru fiecare caz în parte. Unii dintre

Prezentare comparativă a unor criterii interactive utilizate în mecanica ruperii materialelor anizotrope

autorii criteriilor enunțate anterior atrag atenția în mod riguros asupra aplicării practice a exprimărilor matematice după o analiză atentă a stărilor concrete, prin experimentări adecvate, cunoscând foarte bine operațiile tehnologice precedente și efectele lor, în vederea obținerii unui anumit produs compozit, anizotrop. În perspectivă, pe baza celor cunoscute, se pot stabili și valorile unor coeficienți de siguranță, acceptați, care ilustrează raportul dintre valorile tensiunilor limită și cele maxime dezvoltate sub acțiunea sarcinilor exterioare, în structura analizată.

BIBLIOGRAFIE

- [1]. **Oprea Vasiliu Cleopatra, Constantinescu A., Bârsănescu P.**, Ruperea polimerilor – teorie și aplicații, Editura Tehnică, București, 1992.
- [2]. * * * - http://www.resist.pub.ro/Cursuri_master/SMC/CAP.3.DOC - accesat la 06.02.15.
- [3]. **Zuccarello B.**, Progettazione meccanica con materiali non convenzionali (<http://www.imechanica.org/files/Cap6.pdf> - accesat la 12.02.15).
- [4]. **Lefter S. V.**, Contribuții la calculul structurilor navale confecționate din plăci armate cu fibre de sticlă la solicitări dinamice de impact, Teză de doctorat, Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați, 2011.
- [5]. **Banabic D.** (coordonator), Sheet metal forming processes – Constitutive modeling and numerical simulation, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- [6]. **Hosford F. W., Cadell M. R.**, Metal Forming (Mechanics and metalurgy) (third edition), Cambridge University Press, USA, New York, 2007.
- [7]. **Hosford F. W.**, Mechanical behavior of materials, Cambridge University Press, New York, USA, 2005.
- [8]. **Soare C. Șt.**, On the use of homogeneous polynomials to develop anisotropic yield functions with applications to sheet forming, Thesis, University of Florida, USA, 2007.
- [9]. * * *Aerospaziale – Composite stress manual, MTS 006 Iss.B, 1999.
- [10]. **Kobold D., Gantar G., Pepelnjak T.**, Finite element analysis of magnesium AZ 80 wrought alloy anisotropic behaviour during warm forging, *Mechanika*, 18, nr. 3, 2012, p. 251 – 258.
- [11]. * * * https://en.wikipedia.org/wiki/Hill_yield_criterion - accesat la 13.12.15;
https://en.wikipedia.org/wiki/Lankford_coefficient - accesat la 15.12.15.
- [12]. **Çoğun F.**, Implementation and comparison of different constitutive models in deep drawing process, Thesis, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 2013.
- [13]. **Dowling E. N.**, Mechanical behavior of materials (Engineering methods for deformation, fracture and fatigue) (fourth edition), Pearson Education Limited, Edinburg, England, 2013.
- [14]. **Larsson R.**, Constitutive modeling of high strength steel, Thesis, Institut of Technology - Linköping University, Swenden, 2007.
- [15]. **Meuwissen H. H. M.**, Yield criteria for anisotropic elasto-plastic metals, Internal Report WFW 95.152, Fakulteit der Werktuigbouwkunde, Technische Universiteit Eindhoven, Netherlands.
- [16]. * * * - Criteri di resistenza per materiali compositi con rinforzo a fibre continue, Politecnico di Milano (http://www.aero.polimi.it/~sala/.../Modalita_Rottura_e_Criteri_Resistenza.pdf - accesat la 12.02.15).
- [17]. **Bajanov L. V., Goldenblat I. I., Kopnov A. V., Pospelov D. A., Siuiukov M. A.**, Plastinki i obolociki iz stekloplastikov, Izd. “Vășșaia șkola”, Moskva, 1970.
- [18]. **Camanho P. P.**, Failure criteria for fibre – reinforced polymer composites, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Universidade do Porto, Portugal, 2002 (<https://web.fe.up.pt/~stpinho/teaching/feup/y0506/fcriterias.pdf> - accesat la 02.10.15).
- [19]. **Tuttle E. M.**, Structural analysis of polymeric composite materials, Marcel Dekker, Inc. New York, USA, 2004 (<http://www.dekker.com>).
- [20]. **Kaw K. A.**, Mechanics of composite materials (second edition), CRC Press, Taylor & Francis Group, New York, 2006.

- [21]. **Alămoreanu Elena, Constantinescu D. M.**, Proiectarea plăcilor compozite laminate, Editura Academiei Române, București, 2005.
- [22]. **Vannucci P.**, Calcolo dei laminati secondo la teoria classica (<http://www.imechanica.org/files/Cap6.pdf> - accesat la 12.02.15); Materiali compositi per impieghi strutturali. Metodi di analisi e di progetto (http://paolo.vannucci.free.fr/Mat_Comp_it.pdf - accesat la 26.02.15).
- [23]. **Aicher S., Klöck W.**, Linear versus quadratic failure criteria for inplane loaded wood based panels, Otto-Graf-Journal, vol. 12, 2001, p. 187 – 200.
- [24]. **Schellekens J. C. J., De Borst R.**, The use of the Hoffmann yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites, Computers & Structures, vol. 37, nr. 6, 1990, p. 1087 - 1096.
- [25]. **Wiengand J.**, Constitutive modelling of composite materials under impact loading, Thesis, Solid Mechanics and Materials Engineering Group, Department of Engineering Science, University of Oxford, England, 2008.
- [26]. **Jones M. R.**, Mechanics of composite materials (second edition), Taylor&Francis Group, LLC, Philadelphia, USA, 1999.
- [27]. **Servetnik N. A.**, Energy-based method for gas turbine engine disk burst calculation, 28th Congress of International Council of the Aeronautical Sciences 2012 (ICAS 2012), Brisbane, Australia, 23 – 28 September 2012, p. 2443 – 2448 (https://www.google.ro/search?q=Servetnik+N.+Anton,+Energy+-+based+method+for+gas&ie=utf-8&oe=utf-8&gws_rd=cr&ei=gw1rVrX0J8f0POfOiVA - accesat la 11.12.15).
- [28]. **Ahmad Israr B. A. H.**, Étude expérimentale et numérique de l'écrasement de stratifiés composites à base de fibre de carbone, Thèse, Université de Toulouse, France, 2014 (depozit.isae.fr/theses/2014/2014_Israr_Ahmad_Haris.pdf - accesat la 02.02.15).
- [29]. **Kassapoglou Ch.**, Design and analysis of composite structures with applications to aerospace structures, John Wiley and Sons, Ltd, Publication, 2010.
- [30]. **Naghipour Parya**, Numerical simulations and experimental investigations on quasi – static and cyclic mixed delamination of multidirectional CFRP laminates, Thesis, Institut für Flugzeugbau der Universität Stuttgart, Germany, 2011 (https://www.google.ro/search?q=Naghipour+Parya&ie=utf-8&oe=utf-8&gws_rd=cr&ei=asUvVtTnEKn-ygPSmZvIAw - accesat la 25.10.15).
- [31]. **Pinho T. S., Dávila G. C., Camanho P. P., Iannucci L., Robinson P.**, Failure Models and criteria for FRP under in-plane or three – dimensional stress states including shear non – linearity, Nation al Aeronautics and Space Administration, NASA Langley Research Center Hampton, VA 23681, February 2005.
- [32]. **Weiss A.**, Comportement en fatigue des zones de reprises de plis, Thèse, L'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Université de Toulouse, France, 2010 (https://www.google.ro/search?q=Weiss+Ambrosius+-+Thesis&ie=utf-8&oe=utf-8&gws_rd=cr&ei=HlguVoLwH4H6sgGCh7KwAw - accesat la 25.10.15).
- [33]. **Plunkett B., Cazacu Oana., Barlat F.**, Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals, International Journal of Plasticity, 24, 2008, p. 847 – 866.
- [34]. **Cai J. X., Xu Q. J.**, Interfacial fracture criteria based on the nominal deformation energy of interface, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 75, 2015, p. 16 – 21.