

RIGID ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE CU JOC MARE ÎN CUPLA CINEMATICĂ

REVOLUTION MOTION OF RIGID-BODY WITH BIG CLEARANCE IN JOINT

Ș. I. dr. ing. Jan-Cristian GRIGORE¹

¹ Universitatea din Pitesti, Romania
E-mail: jan_grigore@yahoo.com

Rezumat: În aceasta lucrarea se prezintă relațiile de legătură, ecuația de mișcare, funcție de parametrii de mișcare pentru rigid în mișcare de rotație cu joc mare în cuplă, cazul fără frecare, utilizând metoda multicorp.

Cuvinte cheie : relațiile de legătură, ecuațiile mișcării, joc, cupla cinematică.

Abstract: In this paper presents relations liaison, the equation of motion, depending on the parameters of motion for rigid rotating the big clearances in joint, if without friction, using multi-body.

Keywords: equation of motion, joint, rigid body

1. MIȘCARE FĂRĂ FRECARĂ ÎN CAZUL GENERAL

Necesitățile de sporire a producției și productivității, prin mecanizare și automatizare, cât și dezvoltarea mijloacelor moderne de calcul conduc la crearea mecanismelor complexe care prezintă proprietăți multiple și pot îndeplini foarte bine cele mai severe condiții tehnologice din construcția de mașini. Diferența între mecanisme reale și cele ideale datorită abaterilor de la formele, dimensiunile și proprietățile corpurilor și materialelor impune executarea unor analize complexe care să țină seama de toleranțele de prelucrare ale elementelor, de jocurile din cuplele cinematice, de condițiile termice de lucru, de uzurile admisibile în zonele de contact, de elasticitățile și plasticitățile materialelor, de șocurile și ciocnirile dintre elemente, de vibrațiile acestora.

Scopul principal al analizării acestor influențe, atât prin calcul, dar de cele mai multe ori prin modelele experimentale, este de a ajunge la alegerea rațională a toleranțelor.

Problemele mecanismelor și mai ales ale celor cu jocuri în cuple sunt foarte dificile; întocmirea algoritmilor de calcul, întrebuintarea liniarizării ecuațiilor și stabilirea convergențelor proceselor de calcul și de funcționare, analizarea multiplă și complexă, cinematică și dinamică, interpretarea rezultatelor, sunt numai câteva din greutățile care apar.

Dacă în cupla cinematică jocul este mare atunci modelul matematic al mișcării are la bază calculul complet fără aproximări.

În acest sens axa fusului (fig. 1.) de rază r nu mai rămâne în interiorul unui cilindru de rază $R^* - r^*$ ci în interiorul unui cilindru de rază $R^* - \frac{r^*}{\cos \gamma}$ unde R este raza lagărului iar γ unghiul ce se obține din ecuația

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{R^* - \frac{r^*}{\cos \gamma}}{L} \quad (1)$$

respectiv din ecuația

$$R^* \cos \gamma - L \sin \gamma - r^* = 0 \quad (2)$$

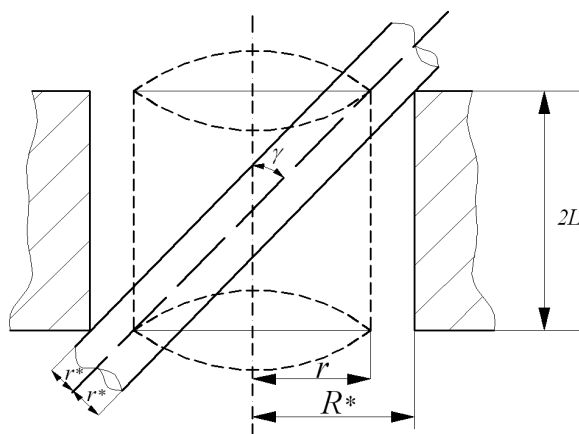


Fig.1

Dacă spre exemplu $R^* = 2r^*$; $L = 2r^*$ se obține $\gamma = 24.3^\circ$ și raza r a cilindrului este:

$$r = 2r^* - \frac{r^*}{\cos 24.3^\circ} = 0.903 \cdot r^* \quad (3)$$

în loc de r^* rezultat ce s-ar fi obținut prin calcul aproximativ.

Rezultă deci că fusul are o mișcare în care axa OZ (fig. 2) se reazemă în punctele D, E pe cercurile de rază r , centrul fusului O are o deplasare O_0O iar sistemul de referință $Oxyz$ legat solidar cu fusul are o mișcare complexă de rigid supus la legături în punctele D, E .

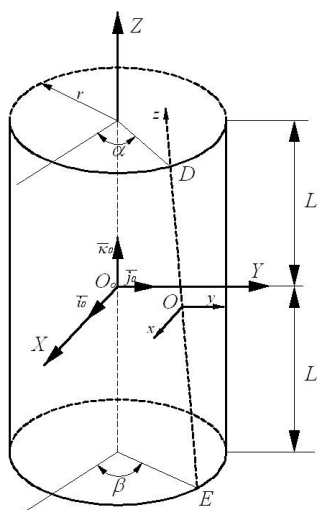


Fig. 2

2. PARAMETRII CARE DEFINESC MIȘCAREA. RELAȚIILE DE CONSTRÂNGERE

Considerând că punctul O (fig. 2) rămâne în planul O_0XYZ se pot lua ca parametri coordonatele X_0, Y_0 ale punctului O și [5, 6] unghiurile lui Euler ψ, θ, φ .

Matricea de rotație [5, 6] este:

$$[R] = [\psi] \cdot [\theta] \cdot [\varphi] \quad (4)$$

unde

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [\theta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}; [\varphi] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Se obține

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

Cu notațiile din fig.2, din relațiile vectoriale

$$\overline{O_0 D} = \overline{O_0 O} + \overline{OD} \quad ; \quad \overline{O_0 E} = \overline{O_0 O} + \overline{OE} \quad (7)$$

se obțin expresiile matriciale

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \end{bmatrix} + [R] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_D \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \end{bmatrix} + [R] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_E \end{bmatrix} \quad (8)$$

din care rezultă

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= X_0 + z_D \cdot \sin \psi \sin \theta \quad ; \quad r \cos \beta = X_0 + z_D \cdot \sin \psi \sin \theta \\ r \sin \alpha &= Y_0 - z_D \cdot \cos \psi \sin \theta \quad ; \quad r \sin \beta = Y_0 - z_E \cdot \cos \psi \sin \theta \\ L &= z_D \cos \theta \quad \quad \quad -L = z_E \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

și de aici se obțin egalitățile

$$\psi = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad ; \quad \frac{L}{r} \tan \theta = -\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (10)$$

$$X_0 = \cos \psi \sqrt{r^2 - L^2 \tan^2 \theta} \quad ; \quad Y_0 = \sin \psi \sqrt{r^2 - L^2 \tan^2 \theta} \quad (11)$$

Relațiile (11) sunt echivalente cu relațiile:

$$\begin{aligned} X_0^2 \cos^2 \theta - r^2 \cos^2 \psi \cos^2 \theta + L^2 \cos^2 \psi \sin^2 \theta &= 0 \\ Y_0^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \psi \cos^2 \theta + L^2 \sin^2 \psi \sin^2 \theta &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

și reprezintă relațiile de constrângere.

Din (12) prin derivare în raport cu timpul și utilizând notațiile:

$$[B] = \begin{bmatrix} X_0 \cos^2 \theta & 0 & \frac{\sin 2\psi}{2} (r^2 \cos^2 \theta - L^2 \sin^2 \theta) & \frac{\sin 2\theta}{2} [-X_0^2 + (r^2 + L^2) \cos^2 \psi] & 0 \\ 0 & Y_0 \cos^2 \theta & \frac{\sin 2\psi}{2} (-r^2 \cos^2 \theta + L^2 \sin^2 \theta) & \frac{\sin 2\theta}{2} [-Y_0^2 + (r^2 + L^2) \sin^2 \psi] & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\{\dot{q}\} = (\dot{X}_0 \quad \dot{Y}_0 \quad \dot{\psi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi})^T \quad (14)$$

se obține relația matriceală de constrângere

$$[B]\{\dot{q}\} = 0 \quad (15)$$

3. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ MATRICEALĂ A MIȘCĂRII

Notând cu $(v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}); (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ proiecțiile vectorilor $\overline{v_o}, \overline{\omega}$ pe axele triedrului mobil $Oxyz$ unde $\overline{v_o}$ este viteza punctului O iar $\overline{\omega}$ viteza unghiulară a rigidului, și notând cu m masa, $[J]$ matricea momentelor de inerție față de punctul O , cu x_c, y_c, z_c coordonatele în sistemul $Oxyz$ ale centrului de greutate și utilizând expresiile

$$\{V\} = (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}, \omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}; [S] = \begin{bmatrix} 0 & -mz_c & my_c \\ mz_c & 0 & -mx_c \\ -my_c & mx_c & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} [m] & [S]^T \\ [S] & [J] \end{bmatrix} \quad (17)$$

se scriu [7] expresia energiei cinetice

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \{V\}^T \cdot [\tilde{M}] \cdot \{V\} \quad (18)$$

Pentru a exprima energia cinetică în funcție de parametrii $X_0, Y_0, \psi, \theta, \varphi$ și de derivatele acestora se ține seama mai întâi de relațiile:

$$[\tilde{\psi}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \end{bmatrix}; [\tilde{R}] = [\tilde{\psi}][\theta][\varphi] \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{bmatrix} = [\tilde{R}]^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

și apoi de expresia matricială [5]

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [Q]^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (21)$$

unde

$$[Q] = \begin{bmatrix} \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \\ \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Utilizând apoi matricea

$$[T] = \begin{bmatrix} [\tilde{R}] & [0] \\ [0] & [Q] \end{bmatrix} \quad (23)$$

se deduce egalitatea

$$\{v\} = [T]^T \{q\} \quad (24)$$

astfel încât expresia energiei cinetice, cu notația:

$$[M] = [T][\tilde{M}]T^T \quad (25)$$

devine

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \{\dot{q}\}^T \cdot [M] \cdot \{\dot{q}\} \quad (26)$$

În continuare prin utilizarea notațiilor,

$$[M_i] = \frac{\partial [M]}{\partial q_i} \quad i=1,2,3,\dots,5 \quad (27)$$

$$A_i = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_i] \{\dot{q}\} \quad (28)$$

$$\{A\} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5)^T \quad (29)$$

din ecuațiile lui Lagrange pentru cazul existenței constrângerilor (5) se obține ecuația matriceală

$$[M]\{\ddot{q}\} + [\dot{M}]\{\dot{q}\} - \{A\} = \{P\} + [B]^T\{\lambda\} \quad (30)$$

unde $\{P\}$ reprezintă matricea forțelor exterioare generalizate iar $\{\lambda\}$ matricea cu doi multiplicatori ai lui Lagrange

Ținând seama de egalitatea:

$$[\dot{M}] = \sum_{i=1}^5 \dot{q}_i [M_i] \quad (31)$$

și făcând notația

$$\{F\} = \{P\} + \{A\} - [\dot{M}]\{\dot{q}\} \quad (32)$$

se ajunge la forma:

$$[M]\{\ddot{q}\} = \{F\} + [B]^T\{\lambda\} \quad (33)$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] **Alexandru, C.**, Mecanisme articulate-analiză- sinteză-simulare cinematică. Editura Universității "Transilvania" Brașov, 2000
- [2] **Grigore, J.**, Pandrea, N., Aspecte privind jocurile din cuplele cinematice de rotație. Simpozion Târgu Jiu, iunie, 2008.
- [3] **Grigore, J.**, Contribuții la studiul dinamic al mecanismelor cu jocuri. Teză de doctorat, Pitești, 2008.
- [4] **Pandrea, N., Popa, D.**: Mecanisme. Teorie și aplicații CAD, Editura Tehnică, București, 2000.
- [5] **Pandrea, N.**, Mecanica, vol. I, II, Litografia Universității din Pitești, 1994
- [6] **Pandrea, N., Stănescu, N.-D.**, Mecanica., Editura Didactică și Pedagogică, București, 2002.
- [7] **Pandrea, N.**, Mecanica solidelor în coordonate plückriene, Editura Academiei Române, București 2000.
- [8] **Shabana A., A.**, Dynamics of multibody systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2005
- [9] **Stoenescu, E.,D., Marghitu, D.** Dynamic analysis of a planar rigid-link mechanism with rotating slider joint and clearance, Journal of Sound and Vibration vol.266, Issue 2, pages 394-404, 11 september 2003.