

O METODĂ DE REGULARIZARE A LEGII DE FRECARĂ A LUI COULOMB

A METHODE OF REGULARIZATION FOR COULOMB'S LAW OF FRICTION

Prof. dr. Oana PETCOVICIU¹, Dr. ing. Cristina OPRIȚESCU²,
Prof. dr. mat. Ilie Mihai TOADER³

¹Grup Scolar Industrial „Aurel Vlaicu” Arad, Romania

E-mail: oanapetcoviciu@yahoo.com

²ICECON București, Departamentul de Cercetare Timișoara, Romania

E-mail: opritescucristina@yahoo.com

³ICECON București, Departamentul de Cercetare Timișoara

E-mail: toader@mec.upt.ro

Rezumat: Problema contactului cu frecare există în mai multe tipuri de sisteme mecanice.

De exemplu, pentru două corpuri care interacționează; forța de frecare este reprezentată prin intermediul legii de frecare a lui Coulomb. Conform definiției clasice a lui Coulomb frecare este discontinuă pentru viteza de contact zero și acest fapt duce la dificultăți în simularea numerică a sistemului în care efectul „slip- stick” joacă un rol important.

Lucrarea prezintă un model de regularizare pentru Legea de frecare a lui Coulomb, care permite o reprezentare continuă a legii de frecare și care nu necesită identificarea tranziției dintre stările „slip-stick”. Acest model menține structura modelului frecare pentru viteza de contact egală cu zero. În acest caz, regularizarea legii de frecare Coulomb va fi prezentată prin intermediul unor sisteme mecanice simple în care tranzițiile „slip- stick” sunt foarte importante și modelul de regularizare duce la un sistem de calcul pentru care se pot efectua simulări foarte bune.

Cuvinte cheie: frecare Coulomb; sistem dinamic; frecare cu contact, forța de frecare

Abstract: The classical definition of Coulomb friction is discontinuous for zero contact velocity and this fact leads to difficulties in the numerical simulation of mechanical system when slip – stick behaviour plays an important role. This paper shows a model of regularization for Coulomb's law of friction which giving a continuous representation of friction and which doesn't require the identification of transition between slip and stick, but this model maintain the structure of the friction model for contact velocity equal with zero.

Keywords: Coulomb friction; dynamic system; contact friction, force of friction

1. INTRODUCERE

Problemele frecării cu contact există în cazul unui număr mare de sisteme mecanice. Acestea determină creșterea energiei de disipare, instabilitatea „slip - stick” și chiar mișcarea haotică. Legea de frecare a lui Coulomb[3], pentru un singur punct de contact dintre două corpuri ce interacționează, forța de frecare poate fi scrisă cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} f &= -\mu N \operatorname{sig}(\dot{x}) \hat{f}, \dot{x} \neq 0 \\ |f| &\leq \mu N, \dot{x} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

unde f este forța de frecare și $\dot{x} \hat{f}$ este viteza relativă a punctului de contact dintre corpurile considerate. Pentru viteza de contact zero, inegalitatea poate fi ignorată prin considerarea forței de frecare de a fi o funcție f_{ec} - valoarea forței de frecare necesară pentru a echilibra forța rezultată din alte fenomene decât frecarea. Astfel,

$$f = f_{ec}, |f_{ec}| \leq \mu N$$

$$f = \mu N \frac{f_{ec}}{|f_{ec}|}$$
(2)

Prin urmare atunci când sunt considerate ambele relațiile (1) și (2), forța de frecare este o funcție univocă a valorilor $\dot{x}$ și f_{ec} deși această ultimă valoare afectează doar forța de frecare doar pentru $\dot{x} = 0$. Definiția clasică a legii frecării lui Coulomb arată că ea este discontinuă la $\dot{x} = 0$, determinând dificultăți în simularea numerică a sistemelor mecanice cu frecare când comportamentul „slip – stick” joacă un rol fundamental.

Pentru $|f_{ec}| \leq \mu N$ forța de frecare este discontinuă la $\dot{x} = 0^-$ adică: $f(\dot{x})|_{\dot{x}=0} = \lim_{\dot{x} \rightarrow 0^+} f(\dot{x}) \neq \lim_{\dot{x} \rightarrow 0^-} f(\dot{x})$, în timp ce pentru $f_{ec} > \mu N$ forța de frecare este discontinuă la $\dot{x} = 0^+$.

Considerând forța de frecare ca o funcție unică a celor două valori, reprezentarea grafică a legii de frecare Coulomb are forma din figura următoare[1]:

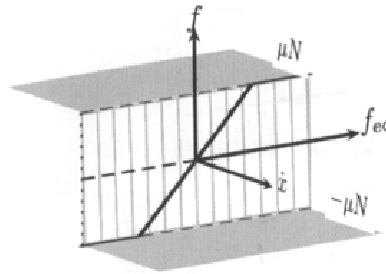


Fig. 1 – Reprezentarea legii de frecare Coulomb

Au fost dezvoltati numeroși algoritmi numerici și o serie de aproximări pentru simularea evoluției sistemelor mecanice nenetede.[4] Cu toate acestea utilizarea lor, pe scară largă este limitată deoarece datorită complexității și cerințelor de calcul trebuie rezolvată fiecare fază de tranziție de la starea de blocare la cea de alunecare. Însă, fără astfel de rutine numerice specializate de simulare de cele mai multe ori obținerea soluțiilor și determinarea stărilor de echilibru nu pot fi determinate. În cele ce urmează se va prezenta o metodă alternativă pentru reprezentarea frecării care anulează discontinuitatea sistemului prezentată mai sus. Acest model va fi prezentat pentru cazul sistemului bidimensional, însă rezultatele pot fi extinse la cazul problemelor cu contact tridimensional.

2. MODEL DE REGULARIZARE A LEGII DE FRECARA A LUI COULOMB

Acest model este o alternativă la celelalte rutine numerice pentru analiza sistemelor mecanice cu frecare și prezintă un model pentru forța de frecare care reduce problemele numerice asociate discontinuităților la viteză nulă din modelul de frecare Coulomb. Acest model de regularizare determină o modificare a reprezentării pentru forța de frecare astfel încât algoritmul numeric să nu necesite identificarea separată a stărilor de tranziție dintre fazele de blocare și cele de alunecare.

Karnopp [1] a introdus o valoare de prag pentru amplitudinea vitezei de contact pentru care gradele de mișcare ale sistemului asociate contactului cu frecare sunt eliminate peste viteza critică relativă aplicată modelului de frecare Coulomb. Modelul lui Karnopp a fost

dezvoltat de către o serie de cercetători pentru a mări acuratețea și stabilitatea numerică a modelului original, însă forța de frecare a continuat să prezinte discontinuități la tranziția de la faza de alunecare la cea de blocare. Prin urmare s-a încercat să se înlăture discontinuitățile identificate mai sus. O astfel de regularizare propusă de către Martins și Oden [2] are forma:

$$\begin{aligned} f &= -\left(\frac{\mu N}{\varepsilon}\right)\dot{x}, |\dot{x}| \leq \varepsilon \\ f &= -\mu N \operatorname{sign}(\dot{x}), |\dot{x}| > \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

unde ε este un parametru fixat de regularizare iar funcția *sign* furnizează semnul argumentului. În acest model forța de frecare este echivalentă cu coeficientul de vâscozitate în vecinătatea vitezei de contact nulă $|\dot{x}| < \varepsilon$ limitată la $|\dot{x}| = \varepsilon$. Astfel o funcție de $(\dot{x}, f_{ec})$ pentru această regularizare propusă este prezentată în figura de mai jos:

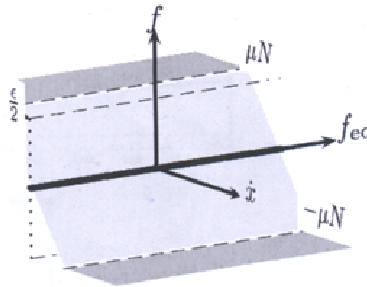


Fig.2 – Regularizarea legii de frecare Coulomb a lui Martins și Oden

Forța de frecare propusă în relațiile (3) trebuie să se anuleze pentru viteza de contact nulă, și viteza limită de regularizare nu coincide cu cea din definiția clasică a legii de frecare Coulomb pentru $\dot{x} = 0$. Ca urmare se propune următoarea metodă de regularizare a legii de frecare Coulomb:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{\mu N}{\varepsilon}(\dot{x} - \xi), |\dot{x} - \xi| \leq \varepsilon \\ f &= -\mu N \operatorname{sign}\left(\frac{\dot{x} - \xi}{\varepsilon}\right), |\dot{x} - \xi| > \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

unde

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon \left(\frac{f_{ec}}{\mu N} \right), \left| \frac{f_{ec}}{\mu N} \right| \leq 1 \\ \xi &= \varepsilon \operatorname{sign}\left(\frac{f_{ec}}{\mu N} \right), \left| \frac{f_{ec}}{\mu N} \right| > 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Deși aceste ecuații sunt similare ecuațiilor (3) pentru $\dot{x} = 0$, acestea se reduc la o descriere a frecării identică cu legea de frecare Coulomb similară ecuațiilor (2). Această modificare elimină discontinuitățile din definiția clasică a frecării cât timp se menține

structura modelului de frecare la viteza de contact zero. Figura următoare prezintă acest model considerând viteza relativă de contact $\dot{x}$ și forța necesară echilibrării forțelor de altă natură decât frecarea f_{ec} .

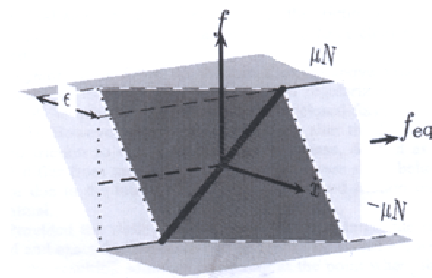


Fig.3 – Regularizarea legii de frecare a lui Coulomb cu ajutorul relațiilor (4)

Modelul de frecare introdus de relațiile (4) și (5) converge la definiția clasică a legii de frecare Coulomb atunci când $\epsilon \rightarrow 0$, în particular structura regularizată la viteza zero este identică cu cea dată de legea de frecare Coulomb.

3. ALGORITMUL DE REGULARIZARE

Deoarece forța de frecare descrisă de relațiile (4) și (5) prezintă formă continuă simulările care se bazează pe dimensiunea fixă a iterației sunt influențate foarte puțin de erorile de calcul. În plus modelul de regularizare nu necesită simulare pentru rezolvarea tranzițiilor dintre intervalele de alunecare și blocare. Spre deosebire de o regularizare obișnuită a legii de frecare Coulomb relațiile (4) și (5) prezintă pentru viteza de contact nulă o structură care este identică cu cea descrisă de modelul clasic al frecării Coulomb și prin urmare permite o simulare eficientă a comportamentului unui sistem în mișcarea „slip – stick”.

În calculele numerice se aplică metoda Runge – Kutta de ordinul 4 cu valoare fixă a pasului, iar rutina de calcul numeric al relațiilor (4) și (5) va fi:

```

if    ( $abs(fec) > muN$ )      then     $xi := sgn(fec / muN);$ 
                                     else     $xi := fec / muN;$ 
if    ( $abs(vcontact - eps * xi) > eps$ ) then  $ffrecare = -muN * sgn(vcontact - eps * xi);$ 
                                     else     $ffrecare = -muN * (vcontact / eps - xi);$ 

```

4. SIMULĂRI NUMERICE

Se consideră un oscilator cu un singur grad de libertate asemenea celui din figură:



Fig. 4

În acest caz reprezentarea frecării dată de relațiile de mai sus va fi:

$$\ddot{x} + \dot{x} = \vec{f}_f + \vec{F}(t) \quad (6)$$

Adică

$$\ddot{x} + x = f_f + \alpha \sin(\omega t) \quad (7)$$

Pentru acest sistem forța necesară pentru echilibrarea forțelor care nu se datorează frecării este: $f_{ec} = x - \alpha \sin(\omega t)$, iar pentru calcule se utilizează metoda Runge-Kutta cu dimensiunea fixă a pasului $\Delta t = 0.01$ și cu $m\mu N = 1$, în timp ce pentru parametrul de regularizare ε se alege valoarea $2\Delta t$.

Pentru simplificarea calculelor se consideră cazul în care forța eternă este nulă; $\alpha = 0$, iar condițiile inițiale ale sistemului sunt $x(0) = 2.5$ și $\dot{x}(0) = 0$. Diagramele obținute sunt prezentate în următoarea figură:

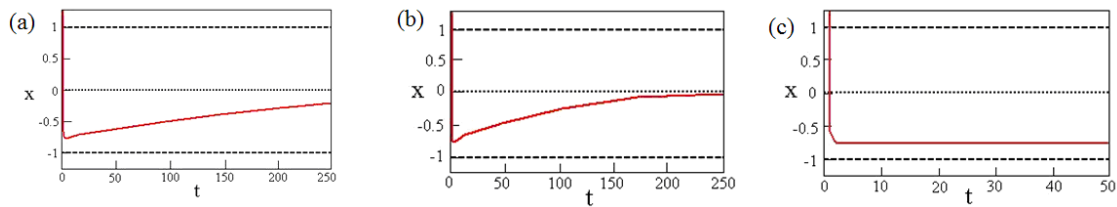


Fig.5 – Simulări numerice la diferite scale

Se observă că pentru intervalul inițial de alunecare simularea frecării este aproape identică cu traiectoria „stick” studiată pentru o stare pentru care viteza $\dot{x}(t)$ este aproximativ zero, apoi traiectoria are o alunecare diferită deoarece pentru discontinuitatea din definiția clasică a legii de frecare Coulomb simularea numerică prezintă erori de discretizare și începe să tindă spre origine ca în figura 5(a). Această situație se poate explica datorită naturii discrete a simulării numerice sistemul nesatisfăcând exact niciodată condiția ca viteza să fie nulă.

Când sistemul se apropie de starea de echilibru forța de frecare variază între valorile +1 și -1, iar viteza nu ia niciodată valoarea numerică zero.

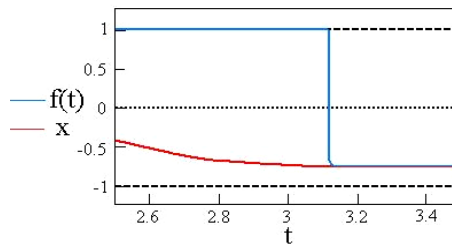


Fig.6 – Evoluția forței de frecare și a traiectoriei în vecinătatea stării de blocare

5. CONCLUZII

Utilizând relațiile (4) și (5) sistemul tinde spre o stare de echilibru diferită de zero – figura 5(a) și 5(b), în plus se constată că dacă modelul de frecare este continuu simularea numerică nu este afectată de forța de frecare prezentată în figura 6.

Simulările numerice realizate cu ajutorul algoritmului Runge – Kutta cu pas fix, implementat în MathLab dovedesc că rezolvarea ecuațiilor (4) și (5) de regularizare a legii de frecare Coulomb pot fi utilizate obținându-se rezultate rezonabile fără a fi necesar să se

identifice separat tranzițiile dintre starea de alunecare și cea de blocare a sistemului mecanic studiat.

BIBLIOGRAFIE

- [1] **D. Karnopp** *Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems*, ASME J. Dyn. Syst., Meas., Control, 107, pag. 100-103, 1985.
- [2] **J.A.C. Martins, J.T. Oden** *Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 52, pag. 527 – 634, 1985.
- [3] **J.A.C. Martins, M. Raous.** *Friction and Stabilities.*, CISM Courses and Lectures No.457, Springer Wien New York, 2002.
- [4] **Oana Petcoviciu, Cristina Opreșcu, M.I. Toader.** *Simulation methods in mechanical contact with friction.* Annual Session Scientific Papers IMT Oradea, FELIX SPA, 2009.