

ASUPRA STATICII ANALITICE

ON THE ANALYTICAL STATICS

Conf. univ. dr. ing. dr. mat. Nicolae-Doru STĂNESCU¹

Prof. univ. dr. ing. Nicolae PANDREA²

¹ Universitatea din Pitești, Catedra de Mecanică Aplicată, Romania
E-mail: s_doru@yahoo.com (doru.stanescu@upit.ro)

² Universitatea din Pitești, Catedra de Mecanică Aplicată, Romania
E-mail: nicolae_pandrea37@yahoo.com

Rezumat: *Lucrarea de față propune o nouă abordare a problemelor de statică utilizând așa numita statică analitică. Pentru aceasta se introduc mai întâi legăturile ideale și ecuația centrală a lui Lagrange și se prezintă formele acestora în diverse cazuri particulare. Lucrarea se încheie cu o aplicație care aduce în discuție cazul cel mai general posibil al unei generalizări datorate lui Lurie pentru o problemă clasică de mecanică*

Cuvinte cheie: *legături ideale, ecuația centrală a lui Lagrange, problema lui Brashman*

Abstract: *This paper purposes a new approach to the statics problems using the so called analytical statics. For this goal we firstly introduce the ideal constraints and the central equation of Lagrange and we present the different forms of it in different particular cases. The papers closes with an application which highlights the most general cases of a generalization made by Lurie for a classical problem of mechanics.*

Keywords: *ideal constraints, central equation of Lagrange, Brashman's problem.*

1. LEGĂTURI IDEALE

Să considerăm un sistem de n puncte materiale M_i , de mase m_i , $i = \overline{1, n}$, și să ne oprim asupra unui punct generic M_i . Asupra acestuia acționează forțele direct aplicate de rezultantă $\mathbf{F}_i$ și o serie de legături a căror rezultantă este $\mathbf{R}_i$. Notând cu $\mathbf{a}_i$ accelerația punctului M_i , din legea a doua a lui Newton putem scrie relația

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i; i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

numită uneori și *principiul eliminării legăturilor*.

Cum $\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$, rezultă că ecuația (1) devine

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i; i = \overline{1, n} \quad (2)$$

sau, ținând seama că

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}, \quad (3)$$

se obține

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + R_{ix}; m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + R_{iy}; m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + R_{iz}. \quad (4)$$

Să presupunem că sistemul este supus la p_1 legături olonome de forma

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0; k = \overline{1, p_1} \quad (5)$$

și la p_2 legături neolonome de forma

$$\sum_{i=1}^n (a_{ik} \dot{x}_i + b_{ik} \dot{y}_i + c_{ik} \dot{z}_i) + d_k = 0; k = \overline{1, p_2}. \quad (6)$$

Necunoscutele sistemului (4) sunt x_i, y_i, z_i , în număr de $3n$, și forțele de legătură R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} în număr și ele de $3n$; deci $6n$ necunoscute. Ecuațiile (4)–(6) formează un sistem cu $3n + p_1 + p_2$ ecuații. Rezultă că ne mai sunt necesare $3n - p_1 - p_2$ ecuații și deci, în general, problema este nedeterminată. Pentru a putea rezolva problema este necesar să adăugăm anumite condiții legate de forțele de legătură.

Lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură $\mathbf{R}_i$ este dat de expresia

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i). \quad (7)$$

Dând o deplasare virtuală sistemului, ecuațiile (5) ce definesc legăturile olonome trebuie să rămână valabile, adică să avem

$$f_k(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \dots, z_n + \delta z_n) = 0, \quad (8)$$

ceea ce înseamnă că

$$\delta f_k = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{grad} f_k \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0; \quad k = \overline{1, p_1}. \quad (9)$$

Legăturile neolonome (6) ne mai oferă încă p_2 relații între variațiile $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, și anume

$$\sum_{i=1}^n (a_{ik} \delta x_i + b_{ik} \delta y_i + c_{ik} \delta z_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_{ik} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0; \quad k = \overline{1, p_2}, \quad (10)$$

unde am notat cu $\mathbf{e}_{ik}$ vectorul ale cărui proiecții pe axe sunt a_{ik}, b_{ik} și c_{ik} .

În cele ce urmează vom demonstra că condiția necesară și suficientă pentru ca lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură să fie egal cu zero este ca forțele de legătură să fie o combinație liniară a gradientilor constrângerilor și vectorilor $\mathbf{e}_{ik}$, adică

$$\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \text{grad} f_k + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k \mathbf{e}_{ik}; \quad i = \overline{1, n} \quad (11)$$

sau, echivalent,

$$\begin{aligned} R_{ix} &= \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k a_{ik}; \quad R_{iy} = \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k b_{ik}; \\ R_{iz} &= \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k c_{ik}; \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (12)$$

unde, evident, λ_k și λ'_k sunt multiplicatorii lui Lagrange.

Să notăm pentru început suficiența. Înlocuind relațiile (12) în (7) și ținând cont de exprimările (9) și (10), vom obține

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k a_{ik} \right) \delta x_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k b_{ik} \right) \delta y_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k c_{ik} \right) \delta z_i = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Pentru a demonstra necesitatea vom arăta mai întâi că putem alege $p_1 + p_2$ coeficienți λ_k, λ'_k astfel încât $3n$ forțe de legătură R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} să fie de forma (12). Pentru aceasta vom înmulți ecuațiile (9) cu $-\lambda_k$, ecuațiile (10) cu $-\lambda'_k$ și rezultatele le vom aduna la ecuația (7) obținând

$$\sum_{j=1}^{3n} \left[R_j - \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} - \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k g_{jk} \right] \delta \xi_j = 0, \quad (14)$$

unde am notat $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = y_1$, $\xi_3 = z_1$, ..., $\xi_{3n-2} = x_n$, $\xi_{3n-1} = y_n$, $\xi_{3n} = z_n$, $g_{1k} = a_{1k}$, $g_{2k} = b_{1k}$, $g_{3k} = c_{1k}$, ..., $g_{3n-2,k} = a_{nk}$, $g_{3n-1,k} = b_{nk}$, $g_{3n,k} = c_{nk}$.

Putem alege $p_1 + p_2$ coeficienți λ_k , λ'_k astfel încât $p_1 + p_2$ termeni din relația (14) să fie egali cu zero, fie ei primii $p_1 + p_2$ termeni; deducem

$$R_j = \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k g_{jk}; \quad j = \overline{1, p_1 + p_2}. \quad (15)$$

Ecuatiile (15) pot fi văzute ca un sistem de $p_1 + p_2$ ecuații cu $p_1 + p_2$ necunoscute λ_k , λ'_k .

Relația (14) devine acum

$$\sum_{j=p_1+p_2+1}^{3n} \left[R_j - \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} - \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k g_{jk} \right] \delta \xi_j = 0. \quad (16)$$

Cum variațiile $\delta \xi_j$ sunt independente, rezultă

$$R_j - \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} - \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k g_{jk} = 0 \quad (17)$$

și afirmația este demonstrată.

Dacă lucrul mecanic virtual este nul, atunci ecuațiile de mișcare (4) capătă forma

$$\begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} + \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k a_{ik}; \quad m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k b_{ik}; \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} + \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k c_{ik} \end{aligned} \quad (18)$$

sau, echivalent,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \text{grad} f_k + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k \mathbf{e}_{ik}. \quad (19)$$

Spunem că legăturile sunt *ideale* dacă lucrul mecanic virtual al forțelor de legătură este nul, adică

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (20)$$

și cum

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^h \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k, \quad (21)$$

unde q_k , $k = \overline{1, h}$, sunt coordonatele generalizate, expresia (20) ne conduce la

$$\sum_{k=1}^h \delta q_k \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (22)$$

Notând acum cu Q_k^* forțele generalizate de legătură,

$$Q_k^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}; \quad k = \overline{1, h}, \quad (23)$$

se obține condiția de legături ideale

$$\sum_{k=1}^h Q_k^* \delta q_k = 0. \quad (24)$$

Dacă legăturile sunt ideale, atunci înmulțind ecuațiile (1) cu $\delta \mathbf{r}_i$ și sumând, se obține exprimarea

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (25)$$

Dacă avem și m coordonate redundante, atunci

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{k=1}^{h+m} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (26)$$

și relația (25) devine

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \left(\sum_{k=1}^{h+m} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \left(\sum_{k=1}^{h+m} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right). \quad (27)$$

Vom identifica și acum forțele generalizate și rezultă

$$\sum_{k=1}^{h+m} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} - Q_k \right) \delta q_k = 0. \quad (28)$$

În acest caz, variațiile δq_k nu mai sunt independente

$$\sum_{k=1}^{h+m} \frac{\partial F_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0; \quad i = \overline{1, m}, \quad (29)$$

$$\sum_{k=1}^{h+m} a_{ik} \delta q_k = 0; \quad i = \overline{1, p_2} \quad (30)$$

reprezentând cele m legături olonome și p_2 legături neolonome.

Dar am văzut că forțele de legătură au exprimarea (15) astfel că se obține sistemul de $h + m$ ecuații de mișcare

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = Q_k + \sum_{l=1}^m \lambda_l \frac{\partial F_l}{\partial q_k} + \sum_{l=1}^{p_2} \lambda'_l a_{lk}; \quad k = \overline{1, h+m}. \quad (31)$$

Sistemul are $h + 2m + p_2$ necunoscute și $h + m$ ecuații (31) la care se adaugă m ecuații (29) și p_2 ecuații (30).

Dacă sistemul este olonom și fără coordonate redundante, atunci ecuațiile (31) iau forma

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = Q_k; \quad k = \overline{1, h}. \quad (32)$$

2. ECUAȚIA CENTRALĂ A LUI LAGRANGE

Expresia $m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i$ se scrie succesiv

$$\begin{aligned} m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) - m_i \mathbf{v}_i \cdot (\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet} = \\ &= \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i - m_i \mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i + m_i \mathbf{v}_i [\delta \mathbf{v}_i - (\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet}]. \end{aligned} \quad (33)$$

Ținând cont că

$$\mathbf{v}_i \cdot \delta \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \delta v_i^2, \quad (34)$$

ecuația (25) devine

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \left[(\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet} - \delta \mathbf{v}_i \right] \quad (35)$$

numită *ecuația lui Hamel* sau *ecuația centrală fundamentală*.

Notând cu E_c energia cinetică a sistemului și cu δL lucrul mecanic virtual al forțelor direct aplicate,

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (36)$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i, \quad (37)$$

ecuația lui Hamel se scrie

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta E_c + \delta L + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \left[(\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet} - \delta \mathbf{v}_i \right]. \quad (38)$$

Dacă operatorii $\frac{d}{dt}$ și δ comută între ei, atunci se obține *ecuația centrală a lui Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta E_c + \delta L. \quad (39)$$

Definind *impulsurile generalizate* prin

$$p_k = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}; \quad i = \overline{1, h}, \quad (40)$$

rezultă egalitatea

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \partial \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i. \quad (41)$$

Pe de altă parte,

$$p_k = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right) = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k}; \quad k = \overline{1, h} \quad (42)$$

și ecuația lui Hamel se scrie

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h p_k \delta q_k \right) = \delta E_c + \sum_{k=1}^h Q_k \delta q_k + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \left[(\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet} - \delta \mathbf{v}_i \right]. \quad (43)$$

Ținând seama de egalitățile succesive

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \left[(\delta \mathbf{r}_i)^{\bullet} - \delta \mathbf{v}_i \right] &= \sum_{i=1}^n \left\{ m_i \mathbf{v}_i \sum_{k=1}^h \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \left[(\delta q_k)^{\bullet} - \delta \dot{q}_k \right] \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^h \left\{ \left[(\delta q_k)^{\bullet} - \delta \dot{q}_k \right] \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right\} = \sum_{k=1}^h p_k \left[(\delta q_k)^{\bullet} - \delta \dot{q}_k \right], \end{aligned} \quad (44)$$

se obține forma finală a ecuației lui Hamel

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h p_k \delta q_k \right) = \delta T + \sum_{k=1}^h Q_k \delta q_k + \sum_{k=1}^h p_k \left[(\delta q_k)^{\bullet} - \delta \dot{q}_k \right]. \quad (45)$$

Dacă forțele sunt conservative, atunci, notând cu V energia potențială, vom defini *funcția lui Lagrange* sau *potențialul cinetic* prin expresia

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_n, t) = E_c - V \quad (46)$$

și ecuația lui Hamel capătă forma

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h p_k \delta q_k \right) = \delta L + \left(\sum_{k=1}^h p_k \left[(\delta q_k)^{\bullet} - \delta \dot{q}_k \right] \right). \quad (47)$$

Dacă operatorii d și δ comută între ei, atunci relația (45) devine ecuația centrală a lui Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h p_k \delta q_k \right) = \delta E_c + \sum_{k=1}^h Q_k \delta q_k \quad (48)$$

care, în cazul forțelor conservative, definind la fel potențialul cinetic prin expresia (46), se scrie

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^h p_k \delta q_k \right) = \delta L \quad (49)$$

Ecuația centrală a lui Lagrange este utilă pentru determinarea poziției de echilibru și a forțelor de legătură în cazul sistemelor de puncte materiale.

Ecuațiile de echilibru se scriu sub forma

$$F_j + \sum_{k=1}^{p_1} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k q_{jk} = 0; \quad j = \overline{1, 3n}. \quad (50)$$

Dacă sistemul are $h + m$ coordonate generalizate (m redundante) legate prin m ecuații finite de legătură

$$F_k(q_1, \dots, q_h, q_{h+1}, \dots, q_{h+m}) = 0; \quad k = \overline{1, m}, \quad (51)$$

și p_2 legături neolonyme

$$\sum_{k=1}^{h+m} a_{ik} \dot{q}_k = 0; \quad i = \overline{1, p_2}, \quad (52)$$

atunci se obțin ecuațiile de echilibru

$$Q_j + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k a_{jk} = 0; \quad j = \overline{1, h+m}. \quad (53)$$

Definind forțele generalizate de legătură Q_j^* prin

$$Q_j^* = \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j} + \sum_{k=1}^{p_2} \lambda'_k a_{jk}; \quad j = \overline{1, h+m} \quad (54)$$

ținând seama că

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k F_k \right), \quad (55)$$

deoarece din (51) avem

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \lambda_k}{\partial q_j} F_k = 0, \quad (56)$$

rezultă că expresia (53) se scrie sub forma

$$Q_j + Q_j^* = 0; \quad j = \overline{1, h+m}, \quad (57)$$

adică suma dintre forțele generalizate și forțele generalizate de legătură este egală cu zero.

Dacă forțele generalizate sunt conservative, adică

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}; \quad j = \overline{1, h+m}, \quad (58)$$

unde V este energia potențială, și dacă nu există legături neolonyme, atunci ecuațiile de echilibru devin

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \left(-V + \sum_{k=1}^m \lambda_k F_k \right) = 0; \quad j = \overline{1, h}, \quad (59)$$

care sunt tocmai condițiile de extremum ale funcției V cu m legături (51).

Dacă nu avem coordonate redundante și nici legături neolome, atunci ecuațiile de echilibru se scriu

$$Q_j = 0; \quad j = \overline{1, h} \quad (60)$$

și, dacă forțele sunt conservative, sub forma

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0; \quad j = \overline{1, h}. \quad (61)$$

3. EXEMPLU

i) Se dă bara omogenă AB de lungime l și greutate G care se sprijină cu capetele A și B pe suprafețele de ecuații $z = f_1(x, y)$ respectiv $z = f_2(x, y)$ (fig. 1). Să se determine pozițiile de echilibru și reacțiunile normale.

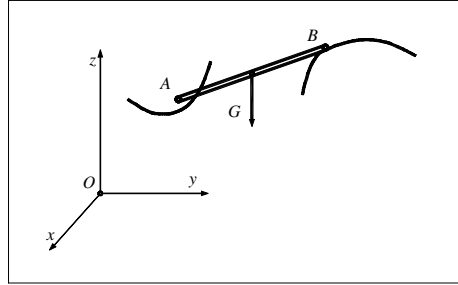


Fig. 1. Exemplul i).

ii) (Problema lui Lurie). Să se rezolve problema i) în cazul în care cele două suprafețe sunt una și aceeași.

iii) (Problema lui Brashman). Să se rezolve problema lui Lurie în cazul particular în care ecuația suprafeței este un elipsoid de revoluție de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-c)^2}{c^2} = 1. \quad (I)$$

Discuție. Să se considere și cazul particular al sferei când

$$a = c = R. \quad (II)$$

Soluție: i) Să notăm cu $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$ coordonatele punctelor A , respectiv B . Se pot scrie ecuațiile

$$\begin{aligned} F_A &= z_A - f_1(x_A, y_A) = 0; \quad F_B = z_B - f_2(x_B, y_B) = 0; \\ F_3 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - l^2 = 0. \end{aligned} \quad (III)$$

Până acum avem 6 necunoscute: coordonatele lui A și B .

Sistemul (III) ne va oferi trei din ele în funcție de celelalte trei dacă defectul matricei

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_A}{\partial x_1} & \frac{\partial F_A}{\partial y_1} & \frac{\partial F_A}{\partial z_1} & \frac{\partial F_A}{\partial x_2} & \frac{\partial F_A}{\partial y_2} & \frac{\partial F_A}{\partial z_2} \\ \frac{\partial F_B}{\partial x_1} & \frac{\partial F_B}{\partial y_1} & \frac{\partial F_B}{\partial z_1} & \frac{\partial F_B}{\partial x_2} & \frac{\partial F_B}{\partial y_2} & \frac{\partial F_B}{\partial z_2} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial z_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial z_2} \end{bmatrix} \quad (IV)$$

este egal cu 0. adică există un minor în $[J]$ de rang 3.

Energia potențială se scrie sub forma

$$V = \frac{1}{2} G(z_A + z_B). \quad (V)$$

Din relația (59) rezultă că va trebui să cecetăm extremele funcției

$$F = -\frac{1}{2} G(z_A - z_B) + \lambda_A F_A + \lambda_B F_B + \lambda_3 F_3 \quad (VI)$$

care depinde de nouă necunoscute: $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, \lambda_A, \lambda_B$ și λ_3 .

Conform teoriei extremelor cu legături rezultă sistemul

$$\begin{aligned} \lambda_A \frac{\partial F_A}{\partial x_A} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_A} &= 0; \lambda_A \frac{\partial F_A}{\partial y_A} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial y_A} = 0; -\frac{1}{2} G + \lambda_A \frac{\partial F_A}{\partial z_A} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial z_A} = 0; \\ \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial x_B} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_B} &= 0; \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial y_B} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial y_B} = 0; -\frac{1}{2} G + \lambda_B \frac{\partial F_B}{\partial z_B} + \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial z_B} = 0; \\ F_A &= 0; F_B = 0; F_3 = 0. \end{aligned} \quad (VII)$$

Primele 6 ecuații (VII) pot fi văzute ca un sistem liniar de 6 șase ecuații cu 3 necunoscute λ_A, λ_B și λ_3 . Rezultă de aici 3 relații de legătură între derivatele parțiale ale funcțiilor F_A, F_B și F_3 . Astfel, grupând primele 3 ecuații (VII) care formează un sistem de 3 ecuații cu 2 necunoscute λ_A și λ_3 , problema este compatibilă dacă

$$\frac{\frac{\partial F_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial F_A}{\partial y_A}} = \frac{\frac{\partial F_3}{\partial x_A}}{\frac{\partial F_3}{\partial y_A}}. \quad (VIII)$$

În mod analog găsim din a patra; a cincea și a șasea ecuație (VII) relația

$$\frac{\frac{\partial F_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial F_B}{\partial y_B}} = \frac{\frac{\partial F_3}{\partial x_B}}{\frac{\partial F_3}{\partial y_B}}. \quad (IX)$$

Pentru ultima relație de legătură vom proceda astfel. Vom elimina λ_A între prima și a treia relație (VII), obținând

$$\frac{1}{2} G = \lambda_3 \left(\frac{\frac{\partial F_3}{\partial z_A}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_A}} - \frac{\frac{\partial F_A}{\partial z_A}}{\frac{\partial F_A}{\partial x_A}} \right), \quad (X)$$

apoi pe λ_B între a patra și a șasea relație (VII), rezultând

$$\frac{1}{2} G = \lambda_3 \left(\frac{\frac{\partial F_3}{\partial z_B}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_B}} - \frac{\frac{\partial F_B}{\partial z_B}}{\frac{\partial F_B}{\partial x_B}} \right) \quad (XI)$$

și la final vom egala expresiile (X) și (XI),

$$\frac{\frac{\partial F_3}{\partial z_A} - \frac{\frac{\partial F_3}{\partial x_A}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_A}}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_A}} = \frac{\frac{\partial F_3}{\partial z_B} - \frac{\frac{\partial F_3}{\partial x_B}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_B}}}{\frac{\partial F_3}{\partial x_B}}. \quad (\text{XII})$$

O relație analoagă se poate obține eliminând λ_A între a doua și a treia relație (VII), eliminând λ_B între a cincea și a șasea relație (VII) și egalând rezultatele.

Poziția de echilibru rezultă din sistemul algebric de șase ecuații cu șase necunoscute format din ecuațiile (III), (VIII), (IX) și (XII), iar din sistemul (VII) găsim λ_A , λ_B , λ_3 .

Reacțiunile normale $\mathbf{N}_A$ și $\mathbf{N}_B$ din punctele A și B se scriu

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_A &= \lambda_A \left(\frac{\partial F_A}{\partial x_A} \mathbf{i} + \frac{\partial F_A}{\partial y_A} \mathbf{j} + \frac{\partial F_A}{\partial z_A} \mathbf{k} \right) + \lambda_3 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_A} \mathbf{i} + \frac{\partial F_3}{\partial y_A} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z_A} \mathbf{k} \right); \\ \mathbf{N}_B &= \lambda_B \left(\frac{\partial F_B}{\partial x_B} \mathbf{i} + \frac{\partial F_B}{\partial y_B} \mathbf{j} + \frac{\partial F_B}{\partial z_B} \mathbf{k} \right) + \lambda_3 \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_B} \mathbf{i} + \frac{\partial F_3}{\partial y_B} \mathbf{j} + \frac{\partial F_3}{\partial z_B} \mathbf{k} \right). \end{aligned} \quad (\text{XIII})$$

Să observăm că sistemul format din ecuațiile (III), (VIII), (IX) și (XII) este compatibil dacă defectul matricei $[\mathbf{J}]$ dată de relația (IV) este egal cu 0. Nu putem spune însă că acest sistem este și determinat în sensul că putem avea mai multe soluții, chiar o infinitate.

ii) Acest punct este un ca particular al punctului i).

Obținem ecuațiile de legătură

$$\begin{aligned} F_A &= z_A - f(x_A, y_A) = 0; \quad F_B = z_B - f(x_B, y_B) = 0; \\ F_3 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - l^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{XIV})$$

Matricea $[\mathbf{J}]$ se scrie acum

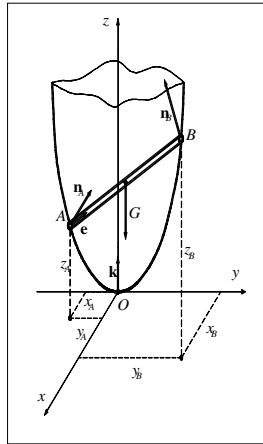


Fig. 2. Problema lui Lurie.

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_A & -\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_A & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_B & -\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_B & 1 \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B & x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{bmatrix} \quad (\text{XV})$$

și are un minor de rang 3,

$$[\mathbf{J}'] = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial f}{\partial x}\big|_B \\ y_A - y_B & z_A - z_B & x_B - x_A \end{bmatrix}. \quad (\text{XVI})$$

Într-adevăr,

$$\det([\mathbf{J}']) = \frac{\partial f}{\partial x}\big|_B \left[-\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A (z_A - z_B) - (y_A - y_B) \right] \neq 0. \quad (\text{XVII})$$

Să notăm cu $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ versorii normalei la suprafață în punctele A , respectiv B , adică

$$\mathbf{n}_A = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A\right)^2}} \mathbf{i} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A\right)^2}} \mathbf{j} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_A\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_A\right)^2}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{n}_B = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\big|_B}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_B\right)^2}} \mathbf{i} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\big|_B}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_B\right)^2}} \mathbf{j} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big|_B\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big|_B\right)^2}} \mathbf{k} \quad (\text{XIX})$$

sau, cu notațiile evidente

$$\mathbf{n}_A = \alpha_A \mathbf{i} + \beta_A \mathbf{j} + \gamma_A \mathbf{k}; \quad \mathbf{n}_B = \alpha_B \mathbf{i} + \beta_B \mathbf{j} + \gamma_B \mathbf{k}. \quad (\text{XX})$$

Dacă notăm cu $\mathbf{e}$ versorul vectorului $\mathbf{AB}$, atunci cosinușii săi directori sunt

$$e_x = \frac{x_2 - x_1}{l}; \quad e_y = \frac{y_2 - y_1}{l}; \quad e_z = \frac{z_2 - z_1}{l}. \quad (\text{XXI})$$

Energia potențială este dată tot de formula (V).

Procedând ca la punctul i), găsim sistemul analog (VII) și anume

$$\alpha_A \lambda_A = 2\lambda_3 l e_x \gamma_A; \quad \alpha_B \lambda_B = -2\lambda_3 l e_x \gamma_B; \quad \beta_A \lambda_A = 2\lambda_3 l e_y \gamma_A; \quad \beta_A \lambda_A = -2\lambda_3 l e_y \gamma_B; \quad (\text{XXII})$$

$$\lambda_A = 2\lambda_A l e_z + \frac{1}{2} G; \quad \lambda_B = -2\lambda_B l e_z + \frac{1}{2} G,$$

de unde rezultă multiplicatorii lui Lagrange

$$\lambda_A = \frac{1}{2} G e_x \frac{\gamma_A}{e_x \gamma_A - e_z \alpha_A} = \frac{1}{2} G e_y \frac{\gamma_A}{e_y \gamma_A - e_z \beta_A}, \quad (\text{XXIII})$$

$$\lambda_B = \frac{1}{2} G e_x \frac{\gamma_B}{e_x \gamma_B - e_z \alpha_B} = \frac{1}{2} G e_y \frac{\gamma_B}{e_y \gamma_B - e_z \beta_B}, \quad (\text{XXIV})$$

$$\lambda_3 = \frac{G}{2l} \frac{\alpha_A}{e_x \gamma_A - e_z \alpha_A} = \frac{G}{2l} \frac{\beta_A}{e_y \gamma_A - e_z \beta_A} = \frac{G}{2l} \frac{\alpha_B}{e_x \gamma_B - e_z \alpha_B} = \frac{G}{2l} \frac{\beta_B}{e_y \gamma_B - e_z \beta_B} \quad (\text{XXV})$$

și primele două relații de legătură

$$\frac{e_x}{e_y} = \frac{\alpha_A}{\beta_A} = \frac{\alpha_B}{\beta_B}. \quad (\text{XXVI})$$

Ultimele două relații arată că versorii $\mathbf{n}_A$ și $\mathbf{n}_B$ se găsesc în planul vertical ce conține bara AB . Într-adevăr, dacă notăm cu $\mathbf{n}$ versorul

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{k}|}, \quad (\text{XXVII})$$

atunci

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_A = \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{k}|} = \frac{\alpha_y e_y - \beta_x e_x}{|\mathbf{e} \times \mathbf{k}|} = 0; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_B = 0. \quad (\text{XXVIII})$$

Mai mult, numitorii expresiilor (XXIII), (XXIV) și (XXV) sunt proporționali cu proiecțiile vectorului $\mathbf{n}$ pe axele Ox și Oy . Pentru aceasta să observăm că

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{n}_A}{|\mathbf{e} \times \mathbf{n}_A|} \quad (\text{XXIX})$$

și deci

$$n_x = \frac{e_y \gamma_A - e_z \beta_A}{|\mathbf{e} \times \mathbf{n}_A|}; \quad n_y = \frac{e_z \alpha_A - e_x \gamma_A}{|\mathbf{e} \times \mathbf{n}_A|}; \quad n_z = \frac{e_x \beta_A - e_y \alpha_A}{|\mathbf{e} \times \mathbf{n}_A|} = 0. \quad (\text{XXX})$$

Mai mult, vectorul $\mathbf{n}$ este paralel cu planul Oxy și deci rezultă că cel puțin una din valorile n_x și n_y este nenulă.

Mai rezultă la fel ca la punctul i) și a treia relație de legătură

$$\frac{\gamma_A}{\alpha_A} + \frac{\gamma_B}{\alpha_B} = 2 \frac{e_z}{e_x} \text{ sau } \frac{\gamma_A}{\beta_A} + \frac{\gamma_B}{\beta_B} = 2 \frac{e_z}{e_y}. \quad (\text{XXXI})$$

Rezultă sistemul format din ecuațiile (XXVI), (XXXI) și (XIV) care ne oferă pozițiile de echilibru.

Din relațiile (XXIII), (XXIV) și (XXV) găsim multiplicatorii lui Lagrange λ_A , λ_B și λ_3 , iar reacțiunile se scriu apoi conform cu expresiile (XIII).

iii) această problemă este un caz particular al celei de la punctul ii). Având de a face cu o suprafață de revoluție, ne vom limita doar la planul Oxy (fig. 3).

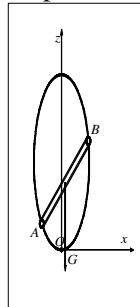


Fig. 3. Problema lui Brashman.

Ecuatia suprafeței se scrie

$$z = c + c\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}} \quad (\text{XXXII})$$

și făcând $y = 0$ rezultă ecuația elipsei din planul Oxz (fig. 3)

$$z = c + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (\text{XXXIII})$$

Ecuatiile care ne dau pe x_A și x_B sunt

$$\frac{\gamma_A}{\alpha_A} + \frac{\gamma_B}{\alpha_B} = 2 \frac{z_B - z_A}{x_B - x_A}; (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l^2 = 0, \quad (\text{XXXIV})$$

unde

$$z_A = c + c\sqrt{1 - \frac{x_A^2}{a^2}}; z_B = c + c\sqrt{1 - \frac{x_B^2}{a^2}}. \quad (\text{XXXV})$$

Dar

$$f(x, z) = z - c - c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 0 \quad (\text{XXXVI})$$

și de aici obținem

$$\frac{\partial f}{\partial c} = c \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}; \frac{\partial f}{\partial z} = 1 \quad (\text{XXXVII})$$

astfel încât

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{a^2}{cx} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (\text{XXXVIII})$$

Dacă notăm

$$x = a \sin u, \quad (\text{XXXIX})$$

atunci rezultă relația

$$\text{ctgu}_A + \text{ctgu}_B = 2 \frac{c^2}{a^2} \frac{\cos u_B - \cos u_A}{\sin u_B - \sin u_A} \quad (\text{XL})$$

și

$$(\sin u_B - \sin u_A)^2 + \frac{c^2}{a^2} (\cos u_B - \cos u_A)^2 = \frac{l^2}{a^2}. \quad (\text{XLI})$$

Notând acum

$$v = \frac{u_B + u_A}{2}; w = \frac{u_B - u_A}{2} \quad (\text{XLII})$$

relațiile (XL) și (XLI) ne conduc la sistemul

$$\sin v (\cos^2 w - \xi^2 \cos^2 v) = 0; \sin^2 w (1 - \xi^2 \cos^2 v) = \frac{l^2}{2c^2}, \quad (\text{XLIII})$$

unde

$$\xi = \frac{c^2 - a^2}{c^2}. \quad (\text{XLIV})$$

Se pot ivi două subcazuri:

a) Dacă $\sin v = 0$, atunci $v = 0$ sau $v = \pi$. Dar $v > 0$ conform cu notațiile (XXXIX) și (XLII). Rezultă singura valoare posibilă $v = \pi$ și $\cos^2 v = 1$. Din a doua relație (XLIII) găsim

$$\sin^2 w = \frac{l^2}{4c^2} \frac{1}{1 - \xi^2} \quad (\text{XLV})$$

și cum

$$1 - \xi^2 = 1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} \quad (\text{XLVI})$$

rezultă

$$\sin^2 w = \frac{l^2}{4a^2} \quad (\text{XLVII})$$

și condiția

$$l \leq 2a. \quad (\text{XLVIII})$$

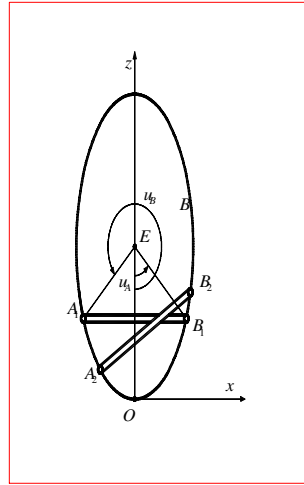


Fig. 4. Pozițiile de echilibru în cazul problemei lui Brashman.

Dacă este îndeplinită condiția (XLVIII), atunci se obține poziția de echilibru A_1B_1 din figura 4, E fiind centrul elipsei.

b) Dacă $\cos^2 w = \xi^2 \cos^2 v = 0$, atunci

$$\cos^2 w = \xi^2 \cos^2 v, \quad (\text{IL})$$

$$\sin^2 w = 1 - \xi^2 \cos^2 v \quad (\text{L})$$

și a doua relație (XLIII) se reduce la

$$1 - \xi^2 \cos^2 v = \frac{l}{2c}, \quad (\text{LI})$$

de unde

$$\cos^2 v = \frac{1 - \frac{l}{2c}}{\xi^2} = \frac{c(2c - l)}{2(c^2 - a^2)} \quad (\text{LII})$$

cu condițiile

$$\frac{2c - l}{c^2 - a^2} \geq 0; \quad \frac{c(2c - l)}{2(c^2 - a^2)} \leq 1. \quad (\text{LIII})$$

Dacă aceste condiții sunt îndeplinite, atunci există și a doua poziție de echilibru notată A_2B_2 în figura 4.

Pentru cazul particular al sferei (adică un cerc în planul Oxz), rezultă

$$\xi = 0, \quad (\text{LIV})$$

iar ecuațiile (XLIII) se scriu

$$\sin v \cos^2 w = 0; \quad \sin^2 w = \frac{l^2}{4R^2}. \quad (\text{LV})$$

Cu condiția $l < 2R$, există o singură poziție de echilibru A_1B_1 reprezentată în figura 5, E fiind centrul cercului.

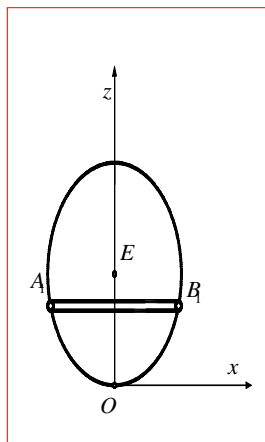


Fig. 5. Pozițiile de echilibru în cazul particular al problemei lui Brashman.

Încheiem cu o observație. De fapt problema lui Brashman nu are 0, 1 sau 2 soluții ci 0, o infinitate sau o dublă infinitate de soluții. Nu avem decât să ne rotim cu ce unghi dorim în jurul axei Oz pentru a obține un nou plan Oxz cu alte poziții de echilibru.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Pandrea, N., Stănescu, N.-D., *Mecanica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 2002.
- [2] Stănescu, N.-D., Pandrea, N., *Mecanica teoretică*, (în pregătire).
- [3] Lurie, A., I., *Analytical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.