ANALIZA DINAMICĂ A SOLIDULUI RIGID CU SIMETRII STRUCTURALE REZEMAT ELASTIC. STUDIU DE CAZ - VIBRAŢIILE DECUPLATE ALE ELEMENTELOR DIN BETON ARMAT

DYNAMIC ANALYSIS OF THE RIGID SOLID WITH STRUCTURAL SYMMETRIES ELASTICALLY JOINTED. CASE STUDY – DECOUPLED VIBRATIONS OF THE REINFORCED CONCRETE BEAMS

Conf. dr. ing. Nicuşor DRĂGAN[1]

[1] MECMET - Centrul de Cercetare pentru Mecanica Maşinilor şi Echipamentelor Tehnologice
Facultatea de Inginerie din Brăila - Universitatea "Dunărea de Jos" din Galaţi, Romania
E-mail: ndragan@ugal.ro

Rezumat: *Articolul propune o abordare a dinamicii modelului solidului rigid cu două tipuri de simetrii structurale şi de rezemare. Aceste simetrii conduc la obţinerea unor modele matematice mai simple, cu ecuaţii diferenţiale decuplate care pot fi rezolvate mai uşor pe cale analitică. Dacă solidul rigid este rezemat prin intermediul a patru legături elastice, modelul matematic devine şi mai simplu iar vibraţiile sistemului se decuplează în două subsisteme cu mişcări cuplate -alunecarea laterală cuplată cu mişcarea de ruliu (legănare), deplasarea longitudinală cuplată cu mişcarea de tangaj (galopare)-, precum şi în două mişcări decuplate: mişcarea de săltare pe verticală şi mişcarea de giraţie (întoarcere).*
Cuvinte cheie: *analiză dinamică, simetrie structurală, vibraţii decuplate, valori proprii*

Abstract: *The article proposes an approach of six degrees dynamic model of a rigid-solid with some types of symmetries. These symmetries lead to simplified mathematical models, which are more easily to solve. If the rigid-solid is jointed of the structure by four elastic links, the mathematical model becomes still simple and the vibrations are decoupled into four subsystems of movements: side slipping and rolling, forward motion and pitching, lifting motion, gyration.*
Keywords: *dynamic analysis, structural symmetry, decoupled vibration, eigenvalues*

1. INTRODUCERE

Sistemul ecuaţiilor diferenţiale de mişcare ale solidului rigid cu legături vâsco-elastice are şase ecuaţii cuplate elastic şi vâscos [1]. Sub formă matricială acest sistem se scrie:

$$\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{B}}\dot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}}\underline{q} = \underline{\underline{f}} \qquad (1)$$

Deoarece sistemul (1) este dificil de rezolvat analitic sau folosind formalismul matricial (volumul foarte mare de calcule, ecuaţia pulsaţiilor proprii de tip polinomial de ordinul şase, expresii foarte complicate ale parametrilor dinamici, foarte dificilă punerea în evidenţă a influenţei caracteristicilor masice, dimensionale şi vâsco-elastice precum şi a factorilor perturbatori asupra formei modurilor proprii şi a amplitudinilor în regim forţat stţionar), se vor considera anumite condiţii dimensionale şi de structură pentru solidul rigid ca sistem vibrant, care să ducă la decuplarea sistemului de ecuaţii în subsisteme mai simple şi uşor de integrat. În plus, se poate considera că legăturile rigidului sunt elastice sau cu amortizări mici, ecuaţiile de mişcare simplificându-se prin anularea amortizărilor. În această ipoteză, sistemul ecuaţiilor diferenţiale de mişcare se simplifică devenind:

$$\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}}\underline{q} = \underline{f} \tag{2}$$

Pentru determinarea modurilor proprii de vibraţie se consideră solidul rigid neperturbat, în formalism matricial ecuaţia diferenţială de mişcare (cu coeficienţi matriciali) este de forma:

$$\underline{\underline{A}}\ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{C}}\underline{q} = \underline{0} \tag{3}$$

Dacă se consideră un sistem de axe central şi principal, matricea de inerţie devine diagonală, sistemul de ecuaţii diferenţiale de mişcare ramânând cuplat elastic dar rămâne cuplat inerţial. În acest caz, matricea de inerţie este:

$$\underline{\underline{A}} = DIAG\lfloor m, m, m, J_x, J_y, J_z \rfloor, \tag{4}$$

unde m este masa rigidului iar J_x, J_y şi J_z sunt momentele de inerţie principale.

2. MIŞCĂRILE DECUPLATE ALE RIGIDULUI CU O AXĂ DE SIMETRIE

Se consideră un rigid cu axa verticală Cz de simetrie. Simetria rigidului constă în simetria de distribuţie masică, simetria dimensională şi simetria legăturilor. Considerând că rigidul are n legături triortogonale elastice în punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $i = \overline{1,n}$ de constante (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}) $i = \overline{1,n}$, matricea de rigiditate devine:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \sum k_{ix} & 0 & 0 & 0 & \sum k_{ix} z_i & 0 \\ 0 & \sum k_{iy} & 0 & -\sum k_{iy} z_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum k_{iz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sum k_{iy} z_i & 0 & \sum \left(k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2\right) & 0 & 0 \\ \sum k_{ix} z_i & 0 & 0 & 0 & \sum \left(k_{iz} x_i^2 + k_{ix} z_i^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum \left(k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2\right) \end{bmatrix} \tag{5}$$

Luând în considerare că sistemul de axe este central şi principal, ecuaţiile diferenţiale de mişcare sunt cuplate numai elastic prin intermediul coeficienţilor $c_{15} \equiv c_{51}$ şi $c_{24} \equiv c_{42}$ din matricea de rigiditate dată de relaţia (5). În acest caz, sistemul de ecuaţii diferenţiale ce descriu vibraţiile libere este de forma:

$$\begin{cases} m\ddot{X} + X\sum k_{ix} + \varphi_y \sum k_{ix} z_i = 0 \\ m\ddot{Y} + Y\sum k_{iy} - \varphi_x \sum k_{iy} z_i = 0 \\ m\ddot{Z} + Z\sum k_{iz} = 0 \\ J_x\ddot{\varphi}_x - Y\sum k_{iy} z_i + \varphi_x \sum \left(k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2\right) = 0 \\ J_y\ddot{\varphi}_y + X\sum k_{ix} z_i + \varphi_y \sum \left(k_{iz} x_i^2 + k_{ix} z_i^2\right) = 0 \\ J_z\ddot{\varphi}_z + \varphi_z \sum \left(k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2\right) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Din analiza termenilor de cuplaj din sistemul de ecuaţii diferenţiale (6), se poate constata o decuplare a mişcărilor libere ale rigidului în următoarele subsisteme (de mişcări cuplate):

a)subsistemul (X, φ_y) - alunecarea laterală cuplată cu mişcarea de ruliu

$$\begin{cases} m\ddot{X} + X\sum k_{ix} + \varphi_y \sum k_{ix} z_i = 0 \\ J_y\ddot{\varphi}_y + X\sum k_{ix} z_i + \varphi_y \sum \left(k_{iz} x_i^2 + k_{ix} z_i^2\right) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

b)subsistemul (Y, φ_x) - mişcarea de avans axial cuplată cu mişcarea de tangaj

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + Y\sum k_{iy} - \varphi_x \sum k_{iy} z_i = 0 \\ J_x\ddot{\varphi}_x - Y\sum k_{iy} z_i + \varphi_x \sum \left(k_{iy} z_i^2 + k_{iz} y_i^2\right) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

c)subsistemul (Z) - mişcarea de săltare

$$m\ddot{Z} + Z\sum k_{iz} = 0 \tag{9}$$

d)subsistemul (φ_z) - mişcarea de întoarcere (giraţie)

$$J_z\ddot{\varphi}_z + \varphi_z \sum \left(k_{ix} y_i^2 + k_{iy} x_i^2\right) = 0 \tag{10}$$

3. MODURILE PROPRII DE VIBRAŢIE ALE RIGIDULUI REZEMAT ELASTIC CU O AXĂ VERTICALĂ DE SIMETRIE

Se consideră rigidul cu axa verticală Cz de simetrie din figura 1. Simetria rigidului constă în simetria de distribuţie masică, simetria dimensională şi simetria legăturilor conform §2. Considerând că rigidul are 4 legături triortogonale elastice identice de constante (k_x, k_y, k_z) în punctele $1(-b,-a,-h)$, $2(-b,a,-h)$, $3(b,a,-h)$ şi $4(b,-a,-h)$, matricea de rigiditate devine:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 4k_x & 0 & 0 & 0 & -4hk_x & 0 \\ 0 & 4k_y & 0 & 4hk_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4hk_y & 0 & 4\left(b^2k_z + h^2k_y\right) & 0 & 0 \\ -4hk_x & 0 & 0 & 0 & 4\left(h^2k_x + a^2k_z\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\left(a^2k_y + b^2k_x\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

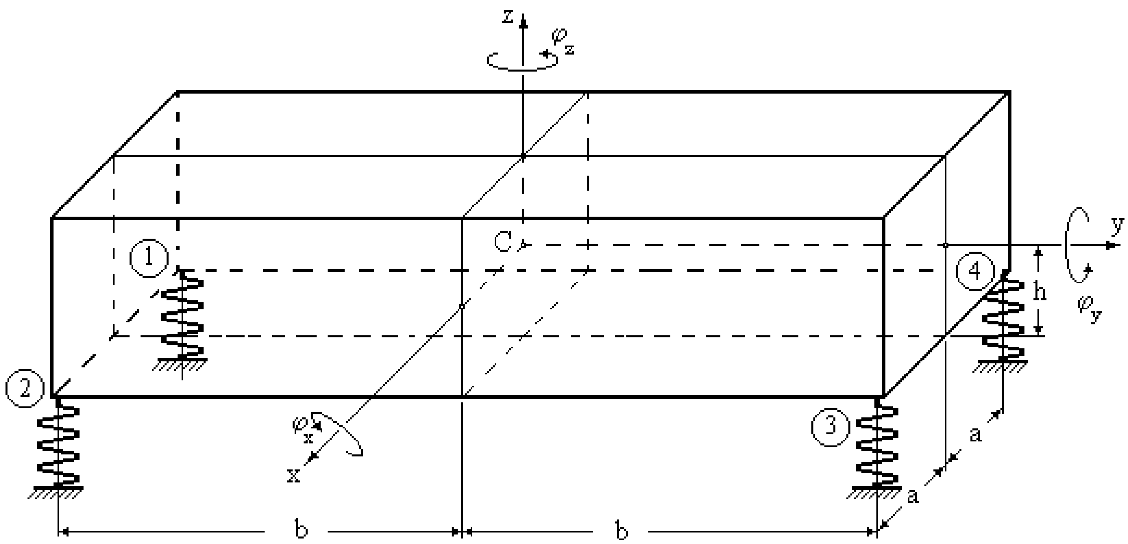

Fig. 1

Pentru rigidul rezemat elastic în patru puncte din figura 1, ecuaţiile vibraţiilor libere decuplate se obţin din relaţiile (7), (8), (9) şi (10) astfel:

a)subsistemul $\left(X,\varphi_y\right)$ - alunecarea laterală cuplată cu mişcarea de ruliu

$$\begin{cases} m\ddot{X} + 4k_xX - 4hk_x\varphi_y = 0 \\ J_y\ddot{\varphi}_y - 4hk_xX + 4\left(h^2k_x + a^2k_z\right)\varphi_y = 0 \end{cases} \tag{12}$$

b)subsistemul $\left(Y,\varphi_x\right)$ - mişcarea de avans axial cuplată cu mişcarea de tangaj

$$\begin{cases} m\ddot{Y} + 4k_yY + 4hk_y\varphi_x = 0 \\ J_x\ddot{\varphi}_x + 4hk_yY + 4\left(b^2k_z + h^2k_y\right)\varphi_x = 0 \end{cases} \tag{13}$$

c)subsistemul $\left(Z\right)$ - mişcarea de săltare

$$m\ddot{Z} + 4k_zZ = 0 \tag{14}$$

d)subsistemul $\left(\varphi_z\right)$ - mişcarea de întoarcere (giraţie)

$$J_z \ddot{\varphi}_z + 4\left(a^2 k_y + b^2 k_x\right)\varphi_z = 0 \tag{15}$$

Expresiile pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor libere necuplate după cele şase “direcţii“ sunt:

a)pentru mişcarea de alunecare laterală

$$p_X = 2\sqrt{\frac{k_x}{m}} \tag{16}$$

b)pentru mişcarea de înaintare axială

$$p_Y = 2\sqrt{\frac{k_y}{m}} \tag{17}$$

c)pentru mişcarea de săltare verticală

$$p_Z = 2\sqrt{\frac{k_z}{m}} \tag{18}$$

d)pentru mişcarea de tangaj

$$p_{\varphi_x} = 2b\sqrt{\frac{k_z}{J_x}} \tag{19}$$

e)pentru mişcarea de ruliu

$$p_{\varphi_y} = 2a\sqrt{\frac{k_z}{J_y}} \tag{20}$$

f)pentru mişcarea de giraţie

$$p_{\varphi_z} = 2\sqrt{\frac{a^2 k_y + b^2 k_x}{J_z}} \tag{21}$$

Se notează termenii de cuplaj dinamic (din matricile dinamice ale subsistemelor cu mişcări cuplate) după cum urmează:

-pentru subsistemul $\left(X, \varphi_y\right)$

$$\alpha_1 = -\frac{4}{m} h k_x \qquad \alpha_2 = -\frac{4}{J_y} h k_x \tag{22}$$

-pentru subsistemul (Y,φ_x)

$$\beta_1 = \frac{4}{m} h k_y \qquad \beta_2 = \frac{4}{J_x} h k_y \tag{23}$$

Cu notaţiile date de relaţiile (16), (17), (19), (20), (22) şi (23), modurile proprii ale subsistemelor cu mişcări cuplate sunt:

-pentru subsistemul (X,φ_y)

■pulsaţiile proprii

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[p_X^2 + p_{\varphi_y}^2 \mp \sqrt{\left(p_X^2 - p_{\varphi_y}^2\right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}\right]} \tag{24}$$

■coeficienţii de distribuţie

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2\alpha_1}\left[p_X^2 + p_{\varphi_y}^2 \pm \sqrt{\left(p_X^2 - p_{\varphi_y}^2\right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}\right] \tag{25}$$

-pentru subsistemul (Y,φ_x)

■pulsaţiile proprii

$$p_{3,4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[p_Y^2 + p_{\varphi_x}^2 \mp \sqrt{\left(p_Y^2 - p_{\varphi_x}^2\right)^2 + 4\beta_1\beta_2}\right]} \tag{26}$$

■coeficienţii de distribuţie

$$\mu_{3,4} = -\frac{1}{2\beta_1}\left[p_Y^2 + p_{\varphi_x}^2 \pm \sqrt{\left(p_Y^2 - p_{\varphi_x}^2\right)^2 + 4\beta_1\beta_2}\right] \tag{27}$$

4. STUDIU DE CAZ - MODURILE PROPRII DE VIBRAŢIE ALE UNEI GRINZI DE BETON ARMAT UTILIZATE ÎN CONSTRUCŢIA DE PODURI RUTIERE

Se consideră modelul simplificat din figura 1 pentru o grindă individuală din beton armat cu o construcţie simetrică (de forma unui paralelipiped dreptunghic) şi rezemare simetrică pe patru reazeme în vârfurile inferioare; caracteristicile dimensionale, inerţiale şi de rezemare elastică sunt următoarele:

►dimensiuni: $2b = 37m \qquad 2a = 3{,}2m \qquad 2h = 3m$

►masă: $m = 2\times 10^5\, kg$

►momente de inerţie: $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$

$$J_x = \frac{2\times10^5}{12}\left(37^2 + 3^2\right) = 22{,}967\times10^6\ kgm^2$$

$$J_y = \frac{2\times10^5}{12}\left(3{,}2^2 + 3^2\right) = 0{,}321\times10^6\ kgm^2$$

$$J_z = \frac{2\times10^5}{12}\left(3{,}2^2 + 37^2\right) = 22{,}987\times10^6\ kgm^2$$

►elasticităţi: $k_{ix} \equiv k_x = 3{,}15\times10^6\ N/m \quad i = \overline{1{,}4}$

$k_{iy} \equiv k_y = 3{,}15\times10^6\ N/m \quad i = \overline{1{,}4}$

$k_{iz} \equiv k_z = 650\times10^6\ N/m \quad i = \overline{1{,}4}$

Utilizând relaţiile de calcul stabilite în §3, pulsaţiile şi frecvenţele proprii ale vibraţiilor necuplate (după cele şase "direcţii") sunt date în tabelul 1.

Tabel 1 - Pulsaţiile şi frecvenţele proprii ale vibraţiilor necuplate (după cele şase "direcţii")

Direcţie	X	Y	Z	φ_x	φ_y	φ_z
p [rad/s]	7,94	7,94	114,02	196,84	144,30	13,75
f [Hz]	1,26	1,26	18,15	31,33	22,97	2,19

Ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor libere pentru subsistemele decuplate şi matricile dinamice corespunzătoare sunt:

●*subsistemul* $\left(X, \varphi_y\right)$

-ecuaţiile diferenţiale de mişcare
$$\begin{cases} 200000\ddot{X} + 12600000X - 18900000\varphi_y = 0 & [N] \\ 321000\ddot{\varphi}_y - 18900000X + 6684350000\varphi_y = 0 & [Nm] \end{cases},$$

cu forma canonică
$$\begin{cases} \ddot{X} + 63x - 94{,}5\varphi_y = 0 & \left[m/s^2\right] \\ \ddot{\varphi}_y - 58{,}88X + 20823{,}52\varphi_y = 0 & \left[rad/s^2\right] \end{cases}$$

-matricea dinamică
$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & -94{,}5 \\ -58{,}88 & 20823{,}53 \end{bmatrix} \text{ cu UM } \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

●*subsistemul* $\left(Y, \varphi_x\right)$

-ecuaţiile diferenţiale de mişcare
$$\begin{cases} 200000\ddot{Y} + 12600000Y + 18900000\varphi_x = 0 & [N] \\ 22967000\ddot{\varphi}_x + 18900000Y + 889878000000\varphi_x = 0 & [Nm] \end{cases},$$

cu forma canonică
$$\begin{cases} \ddot{Y} + 63Y + 94{,}5\varphi_x = 0 & \left[m/s^2\right] \\ \ddot{\varphi}_x + 0{,}823Y + 38745{,}94\varphi_x = 0 & \left[rad/s^2\right] \end{cases}$$

-matricea dinamică
$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 63 & 94{,}5 \\ 0{,}823 & 38745{,}94 \end{bmatrix} \text{ cu UM } \begin{bmatrix} s^{-2} & ms^{-2} \\ m^{-1}s^{-2} & s^{-2} \end{bmatrix}$$

●*mişcarea decuplată de săltare*

-ecuaţia de mişcare $\quad 200000\ddot{Z} + 2600000000Z = 0 \quad [N]$

-forma canonică a ecuaţiei de mişcare $\quad \ddot{Z} + 13000Z = 0 \quad \left[m/s^2\right]$

●*mişcarea decuplată de giraţie*

-ecuaţia de mişcare $22987000\ddot{\varphi}_z + 4344600000\varphi_z = 0 \quad [Nm]$

-forma canonică a ecuaţiei de mişcare $\ddot{\varphi}_z + 189\varphi_z = 0 \quad \left[rad/s^2\right]$

În tabelul 2 sunt trecute valorile determinate cu relaţiile de calcul din §3 pentru pulsaţiile şi frecvenţele proprii ale subsistemelor decuplate, precum şi valorile coeficienţilor de distribuţie $\mu_i \quad i = \overline{1,4}$.

Tabel 2 - Pulsaţiile şi frecvenţele proprii ale subsistemelor cu mişcări decuplate

Subsistem	Pulsaţii [rad/s]	Frecvenţe [Hz]	Coeficienţi de distribuţie [rad/m]
(X, φ_y)	$p_1 = 7{,}92 rad/s$ $p_2 = 144{,}30 rad/s$	$f_1 = 1{,}26 Hz$ $f_2 = 22{,}97 Hz$	$\mu_1 = 0{,}003 rad/m$ $\mu_2 = -219{,}677 rad/m$
(Y, φ_x)	$p_3 = 7{,}94 rad/s$ $p_4 = 196{,}84 rad/s$	$f_3 = 1{,}26 Hz$ $f_4 = 31{,}33 Hz$	$\mu_3 = 0{,}0005 rad/m$ $\mu_4 = 409{,}344 rad/m$
(Z)	$p_5 = p_Z = 114{,}02 rad/s$	$f_5 = f_Z = 18{,}15 Hz$	-
(φ_z)	$p_6 = p_{\varphi_z} = 13{,}75 rad/s$	$f_6 = f_{\varphi_z} = 2{,}19 Hz$	-

5. CONCLUZII

♦modelarea unui solid rigid cu legături elastice sau vâsco-elastice cu diverse tipuri de simetrii conduce la obţinerea unor sisteme de ecuaţii diferenţiale de mişcare decuplate în subsisteme cu mai puţini coeficienţi de cuplaj şi, deci mai uşor de studiat analitic; în acest fel, pot fi puse în evidenţă influenţele factorilor dimensionali, inerţiali, elastici (eventual şi a celor de amortizare) asupra formelor modurilor proprii de vibraţie;

♦dacă se poate modela solidul rigid cu simetrii astfel încât mişcările acestuia să se raporteze la un sistem de axe central şi principal, atunci mişcările acestuia după cele şase "direcţii" (X, Y, Z, φ_x, φ_y, φ_z) sunt cuplate numai prin intermediul coeficienţilor nediagonali ai matricii de rigiditate (eventual şi prin intermediul amortizărilor dacă sunt semnificative);

♦pentru studiul de caz considerat, se poate constata "gruparea" a trei dintre frecvenţele proprii în zona 1÷2,5 Hz, celelalte trei frecvenţe fiind mult mai mari decât primele trei şi mai "distanţate" între ele; aceasta se poate explica numai prin diferenţa foarte mare dintre elasticitatea elementelor de rezemare pe verticală (efort de compresiune) faţă de elasticităţile în plan orizontal (solicitări de forfecare) – raportul constantelor de elasticitate este de circa $\mathbf{1:206}$;

♦valorile sau foarte mari sau foarte mici ale coeficienţilor de distribuţie conduce la concluzia că, în interiorul subsistemelor (X, φ_y) şi (Y, φ_x), mişcările sunt de fapt foarte slab cuplate; în mod real, se poate considera că şi mişcările acestor subsisteme sunt cvasi-decuplate, această decuplare putând fi observată şi din valorile relativ foarte mici ale coeficienţilor de cuplaj α_1, α_2, β_1 şi β_2.

BIBLIOGRAFIE

[1] Drăgan, N. – *"Contribuţii la analiza şi optimizarea procesului de transport prin vibraţii"* teză de doctorat, Universitatea "Dunărea de Jos", Galaţi, 2001