

RĂSPUNSUL UNUI FIR ÎNTINS PE O FUNDAȚIE VÂSCO-ELASTICĂ LA O FORȚĂ MOBILĂ

RESPONSE OF A WIRE ON VISCO-ELASTIC FOUNDATION DUE TO A MOVING FORCE

Conf.dr.ing. Traian MAZILU¹, As.drd.ing. Mădălina DUMITRIU¹,
As.drd.ing. Cristina TUDORACHE¹, Drd.ing. Mircea SEBEȘAN²

¹Universitatea Politehnica București, Raluca
E-mail: trmazilu@yahoo.com

²Metrorex S.A.

Rezumat: Vibrațiile sistemului pantograf-catenară se încadrează în problematica vibrațiilor unui sistem mobil pe o structură elastică. Reducând acțiunea pantografului la o forță mobilă, în acest articol se studiază răspunsul catenarei considerată o coardă infinită legată la o bază fixă printr-o fundație Winkler cu amortizare vâscoasă, utilizând metoda funcțiilor Green. Se disting două regimuri: subcritic și respectiv, supracritic după cum forța se deplasează cu o viteză mai mică sau mai mare decât viteza de propagare a undelor prin firul de contact. În regim supracritic, în fața forței, firul nu se deformează pentru că forța se deplasează mai repede decât viteza de propagare a undelor prin fir. Acest aspect este similar cu efectul Match din acustică. În schimb, în spatele forței, se creează o zonă de siaj în care deformația firului este foarte mare și se propagă pe o distanță considerabilă, spre deosebire de cazul subcritic când deformația firului este localizată în imediata apropiere a forței. În regim subcritic deformația maximă a firului este în dreptul forței, pe când în regim supracritic, deformația maximă migrează undeva în spatele forței. Cercetările ulterioare vor extinde aplicarea acestei metode la modelul catenarei cu parametri distribuiți și variație periodică a elasticității firului de contact.

Cuvinte cheie: pantograf-catenară, funcție Green, coardă infinită, fundație vâsco-elastică.

Abstract: This paper deals with the steady state response of a long string to uniformly moving constant load. Such issue is of interest for the practical field of the pantograph-catenary system. The catenary is modeled as an infinite string on visco-elastic foundation subjected to a constant moving load. The solution of this problem is obtained via the Green's function method. The sub-critical and super-critical responses are analyzed.

Keywords: infinite string, pantograph-catenary system, Green's function.

1. INTRODUCERE

Vibrațiile sistemului pantograf-catenară au fost studiate intens în ultimii 40 de ani odată cu creșterea vitezelor de circulație. Având în vedere configurația catenarei care poate fi privită ca o structură infinită cu variație periodică a elasticității, vibrațiile sistemului pantograf-catenară se încadrează în problematica vibrațiilor unui sistem mobil pe o structură elastică. Acest tip de probleme comportă două aspecte care în esență sunt complementare și ajută la înțelegerea fenomenelor de interacțiune dintre mobil și structura elastică. Primul aspect se referă la rezolvarea problemei răspunsului structurii la o sarcină mobilă, ceea ce înseamnă că acțiunea mobilului este redusă la forța de interacțiune, neluându-se în calcul gradele de libertate ale sistemului mobil [1, 2].

Al doilea aspect are în vedere rezolvarea completă a problemei prin luarea în considerare a gradelor de libertate ale sistemului mobil. În esență, se pleacă de la rigiditatea dinamică sau statică a firului de contact pentru a echivala modelul cu parametrii distribuiți al catenarei cu unul având parametri concentrați și variabili în timp în funcție de viteza de circulație și de distanța dintre stâlpii de susținere a catenarei. Acest model este “asamblat” cu cel al pantografului care este reprezentat printr-un sistem oscilant cu unul până la trei grade de libertate [3, 4, 5].

În marea majoritate a studiilor legate de răspunsul catenarei la o forță mobilă, este preferată reprezentarea acesteia prin modele liniare bazate pe ipotezele coardei vibrante. Astfel, cel mai simplu model reduce întreaga structură a catenarei la firul de contact asimilat printr-o coardă infinită legată la o bază fixă prin elemente elastice și de amortizare uniform distribuite (fundatie Winkler cu amortizare vâscoasă). Prin aceasta se neglijează influența variației elasticității datorită stâlpilor de susținere și atârănătorilor. Rezultatele obținute cu acest model sunt de bază și pot fi folosite pentru comparație așa cum a procedat A. Metrikine [1] pentru a evidenția efectul nelinier introdus de atârănători.

2. MODELUL MECANIC

În continuare se consideră modelul cel mai simplu al catenarei, respectiv o coardă infinită pe suport elastic continuu (fig. 1). Firul catenarei are secțiunea transversală A și este confecționat dintr-un material cu densitatea ρ . Totodată firul este tensionat cu forța T . Suportul elastic este alcătuit din elemente elastice și de amortizare cu caracteristici liniare și uniform distribuite de-a lungul catenarei.

Asupra firului acționează o forță constantă P care se deplasează cu viteza constantă V . Mișcarea firului se raportează la sistemul fix Oxz . De asemenea, se atașează un sistem mobil în dreptul forței $O'x'z'$ cu

$$x = Vt + x' \quad (1)$$

Pentru un observator fix, firul va începe să se miște din ce în ce mai intens pe măsură ce forța se apropie de punctul de observare și va atinge deplasarea maximă atunci când forța trece prin dreptul observatorului. Mișcarea firului îi apare observatorului ca o undă care se deplasează de-a lungul acestuia. Dacă însă observatorul se deplasează odată cu forța P , atunci, după un anumit timp de la începerea deplasării când vibrațiile proprii s-au amortizat, va observa că forma firului este stabilizată de-a parte și de alta a forței întrucât observatorul se deplasează odată cu unda cauzată de forța mobilă.

Ecuția de mișcare a firului raportată la referențialul fix este

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a \frac{\partial w}{\partial t} + kw - T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -mg + P \delta(x - Vt) \quad (2)$$

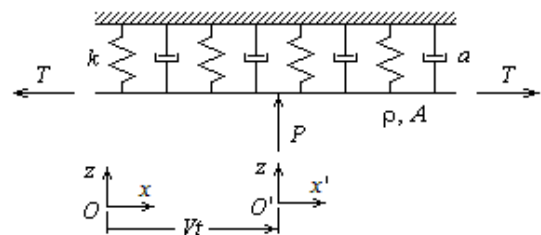


Fig. 1. Modelul mecanic pentru calculul răspunsului firului de contact la o forță constantă mobilă.

unde $m=\rho A$ este masa firului pe unitatea de lungime, k - constanta elastică, iar a - constanta de amortizare ale suportului elastic continuu.

Pentru a determina forma stabilizată a undei din fir, se face schimbarea de variabilă (1) prin care mișcarea este raportată la referențialul mobil. Se obține

$$(V^2 - c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - 2\zeta\omega_0 V \frac{\partial w}{\partial x'} + 2V \frac{\partial^2 w}{\partial x' \partial t} + \omega_0^2 w + 2\zeta\omega_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g + p\delta(x'), \quad (3)$$

unde ζ este gradul de amortizare (se va considera numai cazul amortizării subcritice, $\zeta < 1$), ω_0 –pulsatia proprie a firului pe suportul elastic, c – viteza de propagare a undelor prin fir iar $p=P/m$. Relațiile de calcul ale parametrilor introduși sunt după cum urmează

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{mk}}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad c = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

Întrucât interesează numai răspunsul permanent, derivatele în raport cu timpul care apar în ecuația de mișcare (2) trebuie anulate

$$(V^2 - c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - 2\zeta\omega_0 V \frac{\partial w}{\partial x'} + \omega_0^2 w = -g + p\delta(x'). \quad (4)$$

Este nevoie acum de condițiile la limite

$$\lim_{|x'| \rightarrow \infty} w = 0. \quad (5)$$

Problema definită de ecuația neomogenă (4) și condițiile la limite omogene (5) poate fi rezolvată cu ajutorul funcției Green. Aceasta se construiește ca o combinație liniară a funcțiilor proprii ale operatorului diferențial al ecuației. Deci, se pleacă de la ecuația omogenă

$$(V^2 - c^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x'^2} - 2\zeta\omega_0 V \frac{\partial w}{\partial x'} + \omega_0^2 w = 0 \quad (6)$$

și se încearcă soluții de forma

$$w = Ae^{\lambda x'}. \quad (7)$$

Se ajunge astfel la ecuația caracteristică

$$(V^2 - c^2)\lambda^2 - 2\zeta\omega_0 V\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (8)$$

Valorile proprii, respectiv soluțiile ecuației caracteristice sunt

$$\lambda_{1,2} = \omega_0 \frac{\zeta V \pm \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}{V^2 - c^2}. \quad (9)$$

Trebuie subliniat faptul că în funcție de natura valorilor proprii se stabilește forma funcției Green. Se disting două cazuri care vor fi rezolvate pe rând.

1. Cazul $V < c$ este cazul subcritic când forța se deplasează cu o viteză mai mică decât viteza de propagare a undelor prin firul de contact. Valorile proprii sunt reale și de semne contrare

$$\lambda_1 = \omega_0 \frac{-\zeta V + \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}{c^2 - V^2} > 0, \quad \lambda_2 = \omega_0 \frac{-\zeta V - \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}{c^2 - V^2} < 0. \quad (10)$$

În această situație, funcția Green $G(x', \xi)$ are două forme care asigură îndeplinirea condițiilor la limite

$$\begin{aligned} G^-(x', \xi) &= A^- e^{\lambda_1 x'} \quad \text{pentru} \quad -\infty < x' < \xi \\ G^+(x', \xi) &= A^+ e^{\lambda_2 x'} \quad \text{pentru} \quad \xi < x' < \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

unde A^- și A^+ sunt funcții de ξ ce urmează a fi determinate din condițiile de continuitate și salt pe care funcția Green trebuie să le îndeplinească [6].

Deci funcția Green trebuie să fie continuă pentru $x' = \xi$

$$A^- e^{\lambda_1 \xi} = A^+ e^{\lambda_2 \xi}. \quad (12)$$

Derivata în raport cu x' trebuie să aibă un salt în $x' = \xi$

$$\frac{\partial G^+(\xi + 0, \xi)}{\partial x'} - \frac{\partial G^-(\xi - 0, \xi)}{\partial x'} = -\frac{1}{c^2 - V^2},$$

adică

$$\lambda_2 A^+ e^{\lambda_2 \xi} - \lambda_1 A^- e^{\lambda_1 \xi} = -\frac{1}{c^2 - V^2}. \quad (13)$$

Rezolvând sistemul format de ecuațiile (12) și (13) se obțin

$$A^- = -\frac{e^{-\lambda_1 \xi}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(c^2 - V^2)}, \quad A^+ = -\frac{e^{-\lambda_2 \xi}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(c^2 - V^2)}$$

și apoi funcția Green

$$\begin{aligned} G^-(x', \xi) &= -\frac{e^{\lambda_1(x' - \xi)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(c^2 - V^2)} \quad \text{pentru} \quad -\infty < x' < \xi \\ G^+(x', \xi) &= -\frac{e^{\lambda_2(x' - \xi)}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(c^2 - V^2)} \quad \text{pentru} \quad \xi < x' < \infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Formele funcției Green pot fi prelucrate ținând seama că

$$-(\lambda_2 - \lambda_1)(c^2 - V^2) = 2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}. \quad (15)$$

Înlocuind (15) împreună cu expresiile lui λ_1 și λ_2 în (14), se ajunge la o formă “condensată” a funcției Green

$$G(x', \xi) = \frac{e^{\frac{-\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} |x' - \xi| + \zeta V (x' - \xi)}{c^2 - V^2}}}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}. \quad (16)$$

Deplasarea firului în sistemul de referință mobil este dată de soluția ecuației (3) care se scrie

$$w(x') = \int_{-\infty}^{\infty} G(x', \xi)[-g + p\delta(\xi)]d\xi = -g \int_{-\infty}^{\infty} G(x', \xi)d\xi + pG(x', 0). \quad (17)$$

Integrala din relația de mai sus se poate efectua astfel

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} G(x', \xi)d\xi = \int_{-\infty}^{x'} G(x', \xi)d\xi + \int_{x'}^{\infty} G(x', \xi)d\xi = I_1 + I_2. \quad (18)$$

Avem mai întâi

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}} \int_{-\infty}^{x'} e^{\frac{-\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} + \zeta V}{c^2 - V^2} (x' - \xi)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\omega_0^2 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}} \cdot \frac{c^2 - V^2}{\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} + \zeta V} = \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} - \zeta V}{2\omega_0^2 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}, \\ I_2 &= \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}} \int_{x'}^{\infty} e^{\frac{-\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} - \zeta V}{c^2 - V^2} (\xi - x')} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\omega_0^2 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}} \cdot \frac{c^2 - V^2}{\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} - \zeta V} = \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} + \zeta V}{2\omega_0^2 \sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}, \end{aligned}$$

iar apoi

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}. \quad (19)$$

În final, se obține pentru deplasarea firului expresia

$$w(x') = -\frac{mg}{k} + \frac{p}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}} \exp\left(-\omega_0 \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2} |x'| + \zeta V x'}{c^2 - V^2}\right). \quad (20)$$

Deformația firului în punctul de aplicare a forței mobile rezultă luând în relația de mai sus $x' = 0$. Avem

$$w(x' = 0) = -\frac{mg}{k} + \frac{p}{2\omega_0\sqrt{\zeta^2 V^2 + c^2 - V^2}}.$$

Relația arată că deformația firului crește odată cu creșterea vitezei, ceea ce este echivalent cu scăderea rigidității dinamice a firului de contact.

2. Cazul $c < V$ reprezintă regimul supracritic când forța P se deplasează cu o viteză mai mare decât viteza de propagare a undelor prin firul de contact. Apar două situații diferite și anume, $V < c/(1-\zeta^2)^{1/2}$ și respectiv $V > c/(1-\zeta^2)^{1/2}$.

Dacă $c < V < c/(1-\zeta^2)^{1/2}$, atunci valorile proprii sunt reale și pozitive

$$\lambda_1 = \omega_0 \frac{\zeta V - \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} > 0, \quad \lambda_2 = \omega_0 \frac{\zeta V + \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} > 0, \quad (21)$$

iar dacă $V > c/(1-\zeta^2)^{1/2}$, aceasta va determina ca valorile proprii să fie complex-conjugate cu partea reală pozitivă

$$\lambda_1 = \omega_0 \frac{\zeta V - j\sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}}{V^2 - c^2} > 0, \quad \lambda_2 = \omega_0 \frac{\zeta V + j\sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}}{V^2 - c^2} > 0. \quad (22)$$

În aceste condiții, construcția funcției Green $G(x', \xi)$ ridică o problemă legată de faptul că orice formă exponențială bazată pe vreuna din valorile proprii de mai sus nu poate satisface condiția la limită pentru $x' \rightarrow \infty$. Ca urmare, singura formă posibilă a funcției Green este ca aceasta să fie nulă pe ramura respectivă

$$G^-(x', \xi) = A_1 e^{\lambda_1 x'} + A_2 e^{\lambda_2 x'} \text{ pentru } -\infty < x' < \xi \quad (23)$$

$$G^+(x', \xi) = 0 \text{ pentru } \xi < x' < \infty,$$

unde A_1 și A_2 depind de ξ .

Condițiile de continuitate a funcției (12) și de salt al derivatei (13) devin

$$A_1 e^{\lambda_1 \xi} + A_2 e^{\lambda_2 \xi} = 0 \quad (24)$$

$$\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 \xi} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 \xi} = -\frac{1}{V^2 - c^2}.$$

După câteva calcule rezultă A_1 și A_2

$$A_1 = -\frac{e^{-\lambda_1 \xi}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)}, \quad A_2 = \frac{e^{-\lambda_2 \xi}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)}, \quad (25)$$

precum și funcția Green

$$G^-(x', \xi) = -\frac{e^{\lambda_1(x' - \xi)} - e^{\lambda_2(x' - \xi)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)} \quad \text{pentru} \quad -\infty < x' < \xi$$

$$G^+(x', \xi) = 0 \quad \text{pentru} \quad \xi < x' < \infty. \quad (26).$$

Aceasta din urmă mai poate fi scrisă sub forma

$$G(x', \xi) = -\frac{e^{\lambda_1(x' - \xi)} - e^{\lambda_2(x' - \xi)}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)} H(\xi - x'), \quad (27)$$

în care $H(\cdot)$ este funcția treaptă unitară a lui Heaviside.

Deplasarea firului în raport cu sistemul de referință mobil se calculează de asemenea cu relația (22). Integrala (23) își conservă forma numai că I_1 se anulează. Din (22) și (23) avem

$$I = -\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)} \int_x^\infty [e^{\lambda_1(x' - \xi)} - e^{\lambda_2(x' - \xi)}] d\xi = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{(V^2 - c^2)}. \quad (28)$$

Ținând seama de relațiile lui Viète aplicate ecuației (11), rezultă relația

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\omega_0^2}{V^2 - c^2}, \quad (29)$$

care, introdusă în (28), conduce la

$$I = \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k}. \quad (30)$$

Revenind la relația (22), mai este de calculat $G(x', 0)$, adică

$$G(x', 0) = -\frac{e^{\lambda_1 x'} - e^{\lambda_2 x'}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(V^2 - c^2)} H(-x'). \quad (31)$$

Ținând seama de expresiile valorilor proprii și de relația (20), se scrie

$$G(x',0) = -\frac{e^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}} \frac{e^{\frac{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} x'} - e^{-\frac{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} x'}}{2} H(-x')$$

sau

$$G(x',0) = -\frac{e^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}} \operatorname{sh} \left(\omega_0 \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} x' \right) H(-x'). \quad (32)$$

Se obține deformația firului de contact

$$w(x') = -\frac{mg}{k} - \frac{pe^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}} \operatorname{sh} \left(\omega_0 \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} x' \right) H(-x'). \quad (33)$$

Se poate observa că relația rămâne valabilă și pentru situația în care $V > c/(1-\zeta^2)^{1/2}$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} w(x') &= -\frac{mg}{k} - \frac{pe^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 \sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}} \operatorname{sh} \left(\omega_0 \frac{\sqrt{\zeta^2 V^2 - (V^2 - c^2)}}{V^2 - c^2} x' \right) H(-x') = \\ &= -\frac{mg}{k} - \frac{pe^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 j \sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}} \operatorname{sh} \left(\frac{j \omega_0 \sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}}{V^2 - c^2} x' \right) H(-x') = \\ &= -\frac{mg}{k} - \frac{pe^{\frac{\omega_0 \zeta V}{V^2 - c^2} x'}}{\omega_0 \sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}} \sin \left(\omega_0 \frac{\sqrt{V^2 - \zeta^2 V^2 - c^2}}{V^2 - c^2} x' \right) H(-x') \end{aligned}$$

pentru că $\operatorname{sh}(jx)/j = \sin(x)$.

3. APLICAȚIE NUMERICĂ

În continuare sunt prezentate rezultatele simulării numerice folosind modelul mecanic de mai sus. S-au considerat următoarele date [1]: $m=1,1$ kg/m, $T=15$ kN, $k=0,4$ kN/m², $a=0,5$ Ns/m² și $P=55$ N. Rezultă mai întâi valorile parametrilor sistemului

$$\text{-frecvența proprie} \quad v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{1,1}} = 3,03 \text{ Hz};$$

$$\text{-gradul de amortizare} \quad \zeta = \frac{0,5}{2\sqrt{400 \cdot 1,1}} = 0,0119;$$

-viteza de propagarea a undelor prin fir $c = \sqrt{\frac{150000}{1,1}} = 116,8 \text{ m/s.}$

-deformația statică $w_0 = \frac{mg}{k} = \frac{1,1 \cdot 9,81}{400} = 0,027 \text{ m.}$

Figura 2 a arată că în cazul subcritic (pentru simulare s-a luat $V=70 \text{ m/s} \approx 0,6c$), săgeata firului scade exponențial de o parte și de alta a punctului de aplicare a forței constante. Această descreștere este mai pronunțată în fața forței decât în spatele ei. În situația în care lipsește amortizarea, forma firului devine simetrică. Într-adevăr, pentru $\zeta=0$, relația (33) devine

$$w(x') = -\frac{mg}{k} + \frac{p}{2\omega_0\sqrt{c^2 - V^2}} \exp(-\omega_0|x'|),$$

expresie care arată simetria deformației firului față de $x'=0$.

În cazul supracritic, interesează de fapt $c/(1-\zeta^2)^{1/2} > V$ pentru că, în condițiile date, gradul de amortizare este foarte mic iar $c/(1-\zeta^2)^{1/2}$ este cu puțin mai mare decât c . Efectiv avem $c/(1-\zeta^2)^{1/2} = 1,000071c$, ceea ce justifică afirmația precedentă.

Figura 10 b arată deformația firului în regim supracritic. Calculul s-a efectuat pentru viteza de $130 \text{ m/s} \approx 1,1c$. Comparând cele două figuri 2 a și b, se vede clar diferența între cazul subcritic și cel supracritic. În regim supracritic, deformația nu este simetrică în raport cu punctul mobil de aplicare a forței. În fața forței, firul nu se deformează pentru că forța se deplasează mai repede decât viteza de propagare a undelor prin fir. Acest aspect este similar cu efectul Match din acustică. În schimb, în spatele forței, se creează o zonă de siaj în care deformația firului este foarte mare și se propagă pe o distanță considerabilă, spre deosebire de cazul subcritic când deformația firului este localizată în imediata apropiere a forței. În regim subcritic deformația maximă a firului este în dreptul forței, pe când în regim supracritic, deformația maximă migrează undeva în spatele forței.

4.CONCLUZII

Studiul răspunsului unui fir întins pe o fundație vâsco-elastică la o forță mobilă constantă este interesant din punct de vedere practic datorită aplicațiilor specifice privind interacțiunea pantograf-catenară în cazul trenurilor de mare viteză.

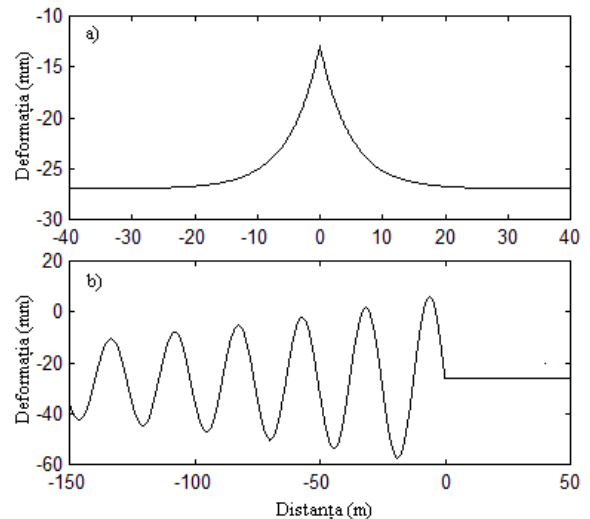


Fig. 2. Deformația firului: a) viteză subcritică; b) viteză supracritică.

Soluția problemei este obținută aplicând metoda funcției Green. Au fost analizate regimul subcritic și cel supracritic, iar rezultatele obținute sunt consistente cu cele menționate în literatura de specialitate.

Cercetările ulterioare vor extinde aplicarea acestei metode la modelul cu parametrii distribuiți și variație periodică a elasticității firului de contact.

BIBLIOGRAFIE

1. **Metrikine, A. V.** *Steady state response of an infinite string on a non-linear visco-elastic foundation to moving point loads.* În: Journal of Sound and Vibration 272 (2004) 1033-1046.
2. **Metrikine, A. V. și Bosch, A. L.** *Dynamic response of a two-level catenary to a moving load.* În: Journal of Sound and Vibration 292 (2006) 676-693.
3. **Wu, T. X. și Brennan, M. J.** *Dynamic stiffness of a railway overhead wire system and its effect on pantograph-catenary system dynamics.* În: Journal of Sound and Vibration 219 (1999) 483-502.
4. **Wu, T. X. și Brennan, M. J.** *Basic Analytical Study of Pantograph-catenary System Dynamics.* În: Vehicle System Dynamics, 30 (1998), 443-456.
5. **Park, T.-J. , Han, C.-S. și Jang, J.-H.,** *Dynamic sensitivity analysis for the pantograph of a high-speed rail vehicle.* În: Journal of Sound and Vibration 266 (2003) 235-260.
6. **Mocică, G.** Transformarea Laplace și operaționale, Ed. UPB, București, 1993.