

CONTRIBUȚII LA DINAMICA SISTEMELOR DE TRANSPORT CU REMORCI

CONTRIBUTIONS TO THE DYNAMICS OF TRANSPORT SYSTEMS WITH TRAILERS

Conf.dr.ing. Elena Elvira ION¹, As.drd.ing. George Cătălin ION¹

¹Universitatea Politehnica București, Romania

E-mail: ion_george_catalin@yahoo.com

Rezumat: În această lucrare de studiază unele aspect ale dinamicii transportului cu remorci, utilizându-se un model cu mai multe grade de libertate. Se prezintă ecuațiile diferențiale ale mișcării și expresiile forțelor dezvoltate în sistem, atât pentru cazul căilor de rulare drepte cât și a celor cu denivelări.

Cuvinte cheie: dinamica de transport, mai multe grade de libertate, ecuațiile diferențiale ale mișcării

Abstract: In this paper some aspects of the dynamics transportation by trailers are studied using a model with many degrees of liberty. The differential equations of the movement and the forces expressions developed in the system are presented, both for the straight circulating ways as for the uneven ones.

Keywords: dynamics transportation, many degrees of liberty, differential equations of the movement

1. INTRODUCERE

Problematica studiată în cadrul acestei lucrări este de o reală actualitate deoarece transporturile sunt astăzi motorul comerțului și practic a economiei. Răspândirea cazurilor analizate este evidentă, utilizarea remorcilor întâlnindu-se atât în transportul urban, cât mai ales în agricultura.

Studiul teoretic are în vedere atât cazul simplu al deplasării remorcilor pe căi de rulare plane, fără denivelări cât și cazurile cu denivelări. Mijloacele de transport cu remorci circulă de regulă, pe drumuri și terenuri care prezintă astfel de denivelări, acestea producând vibrații și șocuri relativ mari întregului sistem. Șocurile și vibrațiile mai pot fi cauzate și de alte surse ca: variația vitezei de deplasare, curbele, smuciturile în timpul manevrărilor, frânările sau accelerările etc.

Elementele sistemului analizat, lucrând în condițiile specifice, sunt solicitate dinamic. Aceste solicitări sunt preluate în mod deosebit de organele de legătură și de suspensie ale fiecărui element. Sistemul de suspensie trebuie să atenueze șocurile și să amortizeze vibrațiile care apar.

2. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII SISTEMULUI

Pentru realizarea studiului am considerat un sistem alcătuit din n elemente de masă $m_1, m_2, \dots, m_n$ și un element motor de masă M (fig.1) care acționează cu forța de tracțiune $\bar{F}$. Dacă notăm cu $\bar{F}_{r0}, \bar{F}_{r1}, \bar{F}_{r2}, \dots, \bar{F}_{rn}$ forțele de rezistență vâscoasă la deplasarea corpurilor, cu $\bar{F}_{01}, \bar{F}_{12}, \dots, \bar{F}_{i-1,i}, \dots, \bar{F}_{n-1,n}$ forțele care apar în cuplajele dintre corpurile

alăturate și cu δ jocul în legătura dintre corpurile i și $i+1$, ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului au forma:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_0 = F - F_{r0} - F_{01}; m_1 \ddot{x}_1 = F_{01} - F_{r1} - F_{12}; \dots; \\ m_i \ddot{x}_i = F_{i-1,i} - F_{ri} - F_{i,i+1}; \dots; m_n \ddot{x}_n = F_{n-1,n} - F_{rn}, \end{cases} \quad (1)$$

în care $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt deplasările absolute în mișcarea de translație față de pozițiile statice de echilibru a celor $n+1$ corpuri.

Forțele care apar în cuplajele dintre elementele $i-1$ și i se pot exprima cu relații de forma:

$$F_{i-1,i} = [k(x_{i-1} - x_i - \delta) + c(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)] \cdot H(x_{i-1} - x_i - \delta) + [k(x_{i-1} - x_i) + c(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)] H[-(x_{i-1} - x_i)] \quad (2)$$

unde k este constanta elastică a arcurilor, c coeficientul de amortizare iar $H(x_{i-1} - x_i - \delta)$ funcția lui Heaviside.

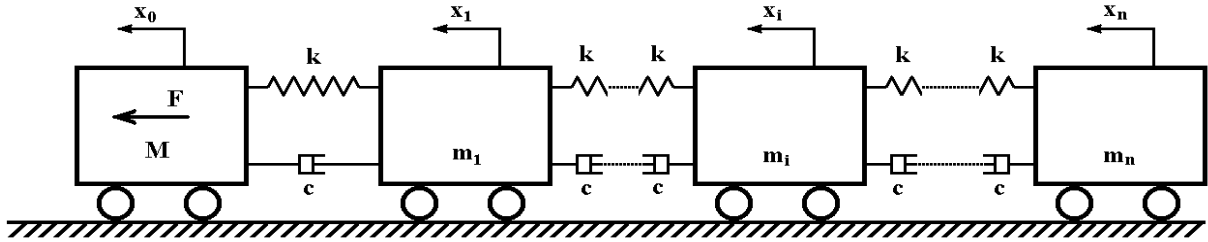


Fig.1

Înlocuind în sistemul (1) forțele $F_{i-1,i}$ date de (2) se obține:

$$\begin{cases} M \ddot{x}_0 = F - [k \cdot (x_0 - x_1 - \delta) + c \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \cdot H(x_0 - x_1 - \delta) + \\ \quad + [k \cdot (x_0 - x_1) + c \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \cdot H(x_1 - x_0) - F_{r0} \\ m_1 \ddot{x}_1 = [k \cdot (x_0 - x_1 - \delta) + c \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \cdot H(x_0 - x_1 - \delta) + [k \cdot (x_0 - x_1) + c \cdot (\dot{x}_0 - \dot{x}_1)] \cdot \\ \quad \cdot H(x_1 - x_0) - [k \cdot (x_1 - x_2 - \delta) + c \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \cdot H(x_1 - x_2 - \delta) + \\ \quad + [k \cdot (x_1 - x_2) + c \cdot (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] \cdot H(x_2 - x_1) - F_{r1} \\ \dots \dots \dots \\ m_i \ddot{x}_i = [k \cdot (x_{i-1} - x_i - \delta) + c \cdot (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)] \cdot H(x_{i-1} - x_i - \delta) + [k \cdot (x_{i-1} - x_i) + c \cdot (\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i)] \cdot \\ \quad \cdot H(x_i - x_{i-1}) - [k \cdot (x_i - x_{i+1} - \delta) + c \cdot (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1})] \cdot H(x_i - x_{i+1} - \delta) + \\ \quad + [k \cdot (x_i - x_{i+1}) + c \cdot (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1})] \cdot H(x_{i+1} - x_i) - F_{ri} \\ \dots \dots \dots \\ m_n \ddot{x}_n = [k \cdot (x_{n-1} - x_n - \delta) + c \cdot (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n)] \cdot H(x_{n-1} - x_n - \delta) + \\ \quad + [k \cdot (x_{n-1} - x_n) + c \cdot (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n)] \cdot H(x_n - x_{n-1}) - F_{rn}. \end{cases} \quad (3)$$

Ecuatiile (3) caracterizează mișcarea sistemului cu n mase cuplate la elementul motor în cazul manevrărilor sub acțiunea forței de tracțiune F .

În cazul a trei corpuri cuplate la elementul motor, corespunzător sistemului de transport cu trei remorci, ecuațiile diferențiale sunt:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_0 = F - [k \cdot (\Delta_1 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_1] \cdot H(\Delta_1 - \delta) + (k\Delta_1 + c\dot{\Delta}_1) \cdot H(-\Delta_1) - F_{r0} \\ m_1 \ddot{x}_1 = [k \cdot (\Delta_1 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_1] \cdot H(\Delta_1 - \delta) + (k\Delta_1 + c\dot{\Delta}_1) \cdot H(-\Delta_1) - \\ \quad - [k \cdot (\Delta_2 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_2] \cdot H(\Delta_2 - \delta) + (k\Delta_2 + c\dot{\Delta}_2) \cdot H(-\Delta_2) - F_{r1} \\ m_2 \ddot{x}_2 = [k \cdot (\Delta_2 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_2] \cdot H(\Delta_2 - \delta) + (k\Delta_2 + c\dot{\Delta}_2) \cdot H(-\Delta_2) - \\ \quad - [k \cdot (\Delta_3 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_3] \cdot H(\Delta_3 - \delta) + (k\Delta_3 + c\dot{\Delta}_3) \cdot H(-\Delta_3) - F_{r2} \\ m_3 \ddot{x}_3 = [k \cdot (\Delta_3 - \delta) + c \cdot \dot{\Delta}_3] \cdot H(\Delta_3 - \delta) + (k\Delta_3 + c\dot{\Delta}_3) \cdot H(-\Delta_3) - F_{r3}, \end{cases} \quad (4)$$

în care s-a considerat: M – masa elementului motor; m_1, m_2, m_3 – masele remorcilor; $\Delta_i = x_{i-1} - x_i$ și $\dot{\Delta}_i = \dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i$ ($i=1,2,3$) deplasările și respectiv vitezele relative; δ – jocul în legătură dintre remorca 2 și 3.

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII REMORCILOR

Dacă se consideră remorca izolată (fig.2), se poate analiza mișcarea cu ajutorul a opt parametri independenți (8 grade de libertate) astfel: φ și ψ rotațiile benei în jurul axelor Oy (tangaj) și respectiv în jurul axei Ox a primei, respectiv a celei de-a doua perechi de roți (punte față și punte spate); x – deplasarea centrului de greutate al remorcii după axa Ox ; z_1 și z_2 – deplasările după axa Oz a centrelor de greutate ale celor două punți; z – deplasarea centrului de greutate al benei după axa Oz .

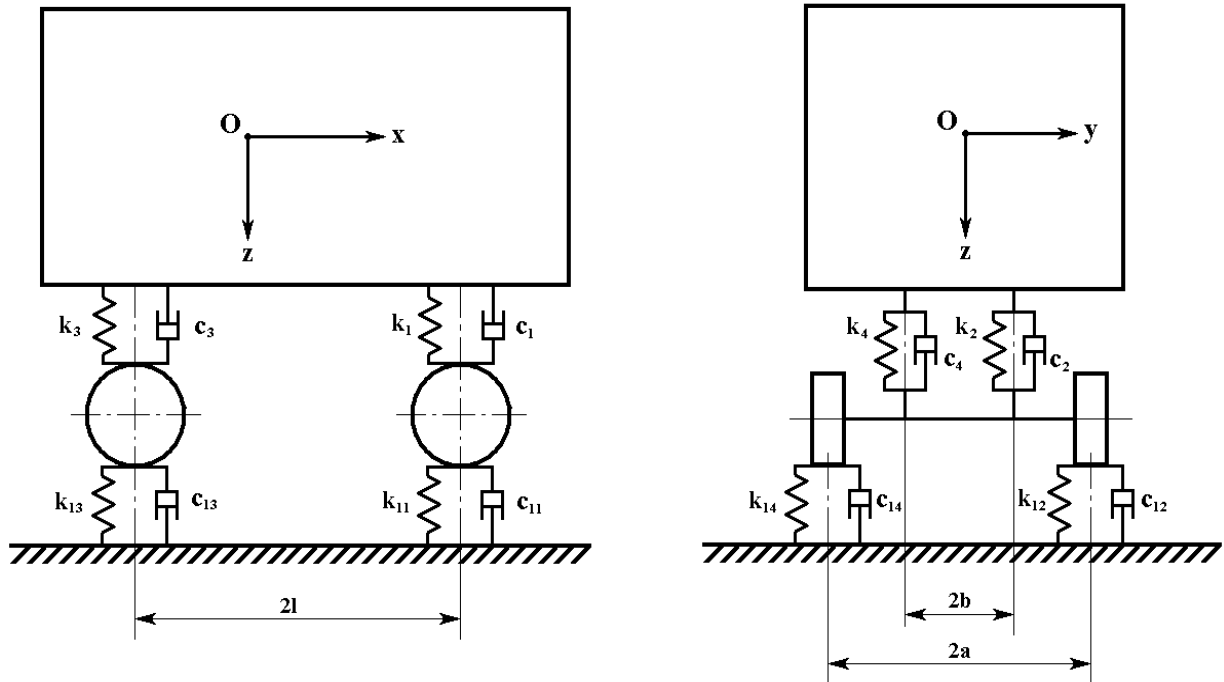


Fig.2

Pentru studiul mișcării este necesară scrierea ecuațiilor Lagrange sub forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1,2,\dots,8) \quad (5)$$

unde E este energia cinetică a sistemului, V energia potențială, ϕ funcția disipativă, q_k și $\dot{q}_k$ coordonatele și respectiv vitezele generalizate.

Având în vedere cele de mai sus putem scrie expresiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{2} m_b \cdot \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J_y \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_x \cdot \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_p \cdot \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} J_{1x} \cdot \dot{\phi}_1^2 + \\ \quad + \frac{1}{2} m_p \cdot \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} J_{1x} \cdot \dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2} \left(m_b + 2m_p + \frac{2J_{1y}}{R_c^2} \right) \cdot \dot{x}^2; \\ V = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} \delta_i^2 k_i + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} k_{1i} \delta_{1i}^2; \\ \phi = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} c_i \delta_i^2 + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} c_{1i} \delta_{1i}^2; \end{array} \right. \quad (6)$$

în care: J_x , J_y momentele de inerție ale benei în raport cu axele Ox și respective Oy ; J_{1x} , J_{1y} momentele de inerție ale punților în raport cu axele Ox și respective Oy ; m_b și m_p masele benei și respective al punților; δ_i și δ_{1i} deformațiile arcurilor suspensiei și respectiv ale căii de rulare; k_i și k_{1i} constantele elastice ale sistemului de suspensie și respective ale căii de rulare; c_i și c_{1i} coeficienții de amortizare ai sistemului de suspensie și respectiv ai căii de rulare.

Deformațiile δ_i și δ_{1i} se calculează cu relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = z + \psi \cdot b + \phi \cdot l - (z_1 + \phi_1 \cdot b); \\ \delta_2 = z - \psi \cdot b + \phi \cdot l - (z_1 - \phi_1 \cdot b); \\ \delta_3 = z + \psi \cdot b - \phi \cdot l - (z_2 + \phi_2 \cdot b); \\ \delta_4 = z - \psi \cdot b - \phi \cdot l - (z_2 - \phi_2 \cdot b), \end{array} \right. \quad (7)$$

respectiv,

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11} = z_1 + \phi_1 \cdot a - \eta_1; \\ \delta_{12} = z_1 - \phi_1 \cdot a - \eta_2; \\ \delta_{13} = z_2 + \phi_2 \cdot a - \eta_3; \\ \delta_{14} = z_2 - \phi_2 \cdot a - \eta_4; \end{array} \right. \quad (8)$$

în care s-a considerat $\operatorname{tg} \phi \approx \phi$; $\operatorname{tg} \psi \approx \psi$, precum și coeficienții η_i care țin seama de neuniformitatea deplasării punților.

Considerând $k_i = k$, $c_i = c$, $k_{1i} = k_1$, $c_{1i} = c_1$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = \eta_4 = \eta'$ și ținând seama de relațiile (5) și (6), se obțin ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului:

$$\begin{cases}
m_b \ddot{z} + 4c\dot{z} - 2c\dot{z}_2 + 4k \cdot z - 2k \cdot z_1 - 2k \cdot z_2 - 2c \cdot \dot{z}_1 = 0 \\
J_y \ddot{\phi} + 2cl^2 \cdot \dot{\phi} - 2cl^2 \cdot \dot{z}_1 + 2cl^2 \cdot \dot{z}_2 + 4kl^2 \phi - 2kl^2 z_1 + 2kl^2 z_2 = 0 \\
J_x \ddot{\psi} + 4cb^2 \cdot \dot{\psi} - 2cb^2 \cdot \dot{\phi}_1 - 2cb^2 \cdot \dot{\phi}_2 + 4kb^2 \psi - 2kb^2 \phi_1 - 2kb^2 \phi_2 = 0 \\
m_p \ddot{z}_1 - 2c \cdot \dot{z} - 2cl \cdot \dot{\phi} + 2c \cdot \dot{z}_1 - 2c_1 \cdot \dot{\eta} - 2kz - 2kl\phi + 2kz_1 + 2c_1 \dot{z}_1 + 2k_1 z_1 - 2k_1 \eta = 0 \\
J_{1x} \ddot{\phi}_1 - 2cb^2 \dot{\psi} + 2cb^2 \dot{\phi}_1 + 2c_1 a \dot{\eta} - 2kb^2 \psi + 2kb^2 \phi_1 + 2c_1 a^2 \dot{\phi}_1 + 2k_1 a^2 \phi_1 - 2k_1 a \eta = 0 \\
m_p \ddot{z}_2 - 2c \cdot \dot{z} + 2cl \cdot \dot{\phi} + 2c \cdot \dot{z}_2 + 2c_1 \cdot \dot{z}_2 - 2\alpha_1 \dot{\eta}' - 2kz + 2k\phi \cdot l + 2kz_2 + 2k_1 z_2 - 2k_1 \eta' = 0 \\
J_{1x} \ddot{\phi}_2 - 2cb^2 \dot{\phi} + 2cb^2 \dot{\phi}_2 + 2c_1 a^2 \dot{\phi}_2 + 2c_1 \dot{\eta}' - 2kb^2 \psi + 2kb^2 \phi_2 + 2k_1 a^2 \phi_2 + 2k_1 a \eta' = 0 \\
\left(m_b + 2m_p + \frac{2J_{1y}}{R_0^2} \right) \ddot{x} = 0.
\end{cases} \quad (9)$$

Ecuatiile diferențiale date de sistemul (9) s-au scris în ipoteza că mișcarea remorcii se face pe un drum fără denivelări.

4. ECUAȚIILE MIȘCĂRII ÎN CAZUL CĂILOR DE RULARE CU DENIVELĂRI

În cazul când apare o denivelare (fig.3) de înălțime notată cu e , traiectoria centrului roții O va avea ecuația

$$(x - \lambda)^2 + [\eta - (R_r - e)]^2 = R_r^2 \quad (10)$$

de unde

$$\eta = (R_r - e) \pm \sqrt{R_r^2 - (vt - \lambda)^2} \quad (11)$$

în care s-a considerat $x = vt$.

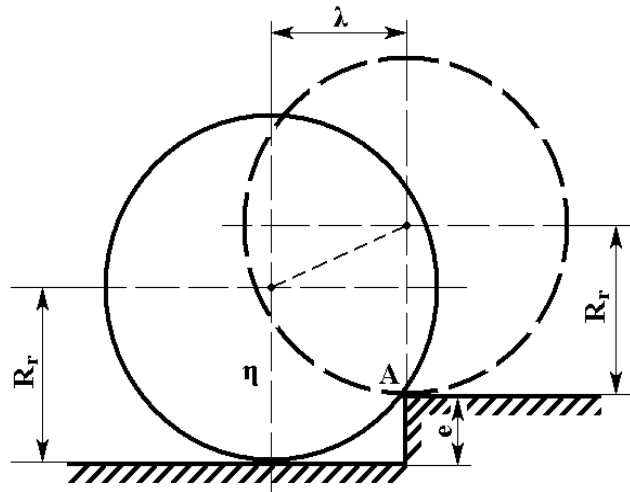


Fig.3

După mai multe operații, se obține

$$\eta = \frac{\sqrt{2R_r e - e^2}}{R_r - e} \cdot vt - \frac{R_r^2 \cdot v^2 t^2}{2(R_r - e)^3} \quad (12)$$

unde $\lambda = \sqrt{2R_r e - e^2}$. Forțele care lucrează asupra suspensiei remorcii sunt:

$$\begin{cases} F'_1 = F'_2 = kz + kl\varphi + kz_1 + c\dot{z} + cl\dot{\varphi} - c\dot{z}_1 \\ F'_3 = F'_4 = kz - kl\varphi - kz_2 + c\dot{z} - cl\dot{\varphi} - c\dot{z}_2. \end{cases} \quad (13)$$

Deformațiile în amortizoare sunt $\delta_1 = \delta_2 = z - l\varphi - z_1$ și $\delta_3 = \delta_4 = z - l\varphi - z_2$. Forțele care se dezvoltă ca urmare a contactului dintre roți și calea de rulare sunt

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = k_1 z_1 + c_1 \dot{z}_1 - k\eta_1 - c\dot{\eta}_1; \\ F_3 = F_4 = k_2 z_2 + c_1 \dot{z}_2 - k_1 \eta_3 - c_1 \dot{\eta}_3. \end{cases} \quad (14)$$

În aceste condiții, vibrațiile remorcii în timpul trecerii peste denivelare sunt caracterizate de ecuațiile

$$\begin{cases} m_b \ddot{z} + 4c\dot{z} - 2c\dot{z}_2 + 4k \cdot z - 2c \cdot \dot{z}_1 - 2k \cdot z_1 - 2k \cdot z_2 = 0 \\ J_y \ddot{\varphi} + 4cl^2 \cdot \dot{\varphi} - 2cl \cdot \dot{z}_1 + 2cl \cdot \dot{z}_2 + 4kl^2 \varphi - 2kl \cdot z_1 + 2kl \cdot z_2 = 0 \\ m_p \ddot{z}_1 - 2c \cdot \dot{z} - 2cl \cdot \dot{\varphi} + 2(c + c_1) \cdot \dot{z}_1 - 2kz - 2kl\varphi + 2(k + k_1)z_1 = +2c_1 \dot{\eta}_1 + 2k_1 \eta \\ m_p \ddot{z}_2 - 2c \cdot \dot{z} + 2cl \cdot \dot{\varphi} + 2(c + c_1) \cdot \dot{z}_2 - 2kz + 2kl \cdot \varphi + 2(k + k_1)z_2 = +2c_1 \dot{\eta}' + 2k_1 \eta', \end{cases} \quad (15)$$

sau:

$$\begin{cases} \ddot{z} + \frac{4c}{m_b} \dot{z} - \frac{2c}{m_b} \dot{z}_2 + \frac{4k}{m_b} \cdot z - \frac{2c}{m_b} \cdot \dot{z}_1 - \frac{2k}{m_b} \cdot z_1 - \frac{2k}{m_b} \cdot z_2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + \frac{4cl^2}{J_y} \cdot \dot{\varphi} - \frac{2cl}{J_y} \cdot \dot{z}_1 + \frac{2cl}{J_y} \cdot \dot{z}_2 + \frac{4kl^2}{J_y} \varphi - \frac{2kl}{J_y} \cdot z_1 + \frac{2kl}{J_y} \cdot z_2 = 0 \\ \ddot{z}_1 - \frac{2c}{m_p} \cdot \dot{z} - \frac{2cl}{m_p} \cdot \dot{\varphi} + \frac{2(c + c_1)}{m_p} \cdot \dot{z}_1 - \frac{2k}{m_p} z - \frac{2kl}{m_p} \varphi + \frac{2(k + k_1)}{m_p} z_1 - \frac{2c_1}{m_p} \dot{\eta}_1 - \frac{2k_1}{m_p} \eta = 0 \\ \ddot{z}_2 - \frac{2c}{m_p} \cdot \dot{z} + \frac{2cl}{m_p} \cdot \dot{\varphi} + \frac{2(c + c_1)}{m_p} \cdot \dot{z}_2 - \frac{2k}{m_p} z + \frac{2kl}{m_p} \cdot \varphi + \frac{2(k + k_1)}{m_p} z_2 - \frac{2c_1}{m_p} \dot{\eta}' - \frac{2k_1}{m_p} \eta' = 0, \end{cases} \quad (16)$$

5. CONCLUZII

Mișcarea sistemului de transport cu remorci s-a putut modela ca un sistem cu mai multe grade de libertate. Ecuațiile diferențiale obținute permit o analiză corespunzătoare a mișcării sistemului care se deplasează pe căi de rulare drepte sau cu denivelări. Astfel, s-au putut stabili relații de calcul pentru forțele din suspensii și pentru cele care se dezvoltă în interacțiunea roți – căi de rulare.

Rezultatele obținute oferă oportunitatea dezvoltării ulterioare a procesului de optimizare a transportului cu remorci pe diferite tipuri de căi de rulare. Plecând de la lărgirea în ultimii ani a gamei de utilaje de transport folosite mai ales în domeniul agriculturii, autorii își propun în viitor extinderea studiului realizat și spre alte noi cazuri și situații.

BIBLIOGRAFIE

1. **Magheți, Ioan, Savu, Mariana**, „*Vibrații mecanice. Teorie și practică*”, Editura BREN, București, 2004.
2. **Bratu, Polidor**, „*Vibrațiile sistemelor elastice*”, Editura Tehnică, București, 2000.
3. **David, L., Voicu, Gh.**, „*Sisteme de transport*”, Editura Printech, 1997.