

CARACTERISTICI DE FRÂNARE ȘI DE ADERENȚĂ PENTRU VEHICULELE FERROVIARE CU BOGHIURI PE DOUĂ OSII

BRAKING AND TRACTION CHARACTERISTICS FOR RAILWAY VEHICLES WITH TWO AXLE BOGIES

George DUMITRU¹, Mirel UNGUREANU², Radu Teodor COSTACHE³,
Elisabeta CRĂCIUN BOJE⁴, Răzvan Costin TUDOSE⁵, Adrian Ilie DUȚAN⁶

¹Autoritatea de Siguranță Feroviară Română - ASFR, Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România; e-mail autor: George DUMITRU: george.dumitru.cfr@gmail.com

²Deutsche Bahn Cargo România SRL, str. „sergent Nuțu Ion”, nr. 44, clădirea „One Cotroceni Park Office”, corpul A, etajul 6, CP 050762, sectorul 5, București, România, e-mail autor: Mirel UNGUREANU: Mirel.Ungureanu@deutschebahn.com;

³Rail Cargo Carrier România SRL - str. „Calea Bucureștilor”, nr. 21-25, Otopeni, România: e-mail Radu Teodor COSTACHE: radu.teodor.costache@gmail.com,

⁴Autoritatea Feroviară Română - str. „Calea Griviței”, nr. 393, sectorul 1, București, România, e-mail autor: Elisabeta CRĂCIUN BOJE: elisabetacraciunboje@afer.ro

⁵SNTFC „CFR Călători” SA - Depoul Pitești, Blvd. „Republicii”, no. 304, CP 117141, Pitești, România, e-mail autor: Răzvan TUDOSE: zedmdfk@gmail.com,

⁶Grup Feroviar Român SA, str. „Calea Victoriei”, nr. 114, CP 010092, sectorul 1, România, e-mail: Adrian DUȚAN: adrian_dutan@yahoo.com

Rezumat: În timpul mersului, asupra unui tren acționează două grupe principale de forțe și anume forțe rezistențe și forțe active. Forțele rezistențe sunt orientate contrar sensului de mers, adică se opun înaintării trenului. Totalitatea acestora formează rezistența R la rulare a trenului. Aceste rezistențe sunt cauzate de frecările dintre fusurile osiilor și cuzineți (lagărele cu rulmenți), frecările de rostogolire între roți și șine, rezistențelor căii de rulare precum și aerului, la care se adaugă alte rezistențe de natură mecanică la înaintare. Forțele active sunt orientate în sensul de mers și provoacă mișcarea trenului. Aceste forțe active sunt create de către motoarele de tracțiune, iar totalitatea lor formează forța de tracțiune F .

Cuvinte cheie: rezistență, declivitate, tren, frânare, tracțiune, aderență, frecare, forțe, patinare.

Abstract: During the journey, two main groups of forces act on a train, namely resistance forces and active forces. The resistance forces are oriented against the direction of travel, that is, they oppose the train's progress. All of them form the resistance R when the train is running. These resistances are caused by the friction between the axle shafts and bearings (bearings with bearings), the rolling friction between the wheels and the rails, the resistance of the track and the air, to which are added other resistances of a mechanical nature when moving forward. The active forces are oriented in the direction of travel and cause the movement of the train. These active forces are created by the traction motors, and their totality forms the traction force F .

Keywords: resistance, slope, train, braking, traction, grip, friction, force, curves, stick slip.

1. Introducere

În funcție de raportul dintre rezistența R la rulare a trenului și forța F de tracțiune, mersul trenului poate fi: accelerat, uniform sau încetinit. Dacă forța F de tracțiune este mai mare decât rezistența R de rulare a trenului ($F > R$), trenul circulă cu

acelerație și își mărește viteza până când aceste forțe devin egale. Atunci când forța F de tracțiune și rezistența R de rulare sunt egale ($F=R$), trenul circulă cu o viteză constantă, adică în mod uniform. Dacă însă, rezistențele de rulare depășesc forța de tracțiune ($F<R$), trenul circulă cu încetinire, și viteza de deplasare se micșorează. Mărirea accelerației sau încetinirea trenului depind de diferența dintre valoarea acestor forțe, respectiv cu cât diferența este mai mare, cu atât va fi mai mare și accelerația sau încetinirea și de aceea, pentru asigurarea accelerației trenului și mersul fără smucituri și jocuri ori alte reacțiuni longitudinale bruște în corpul trenului, mecanicul de locomotivă trebuie să mărească continuu și lent forța de tracțiune, manevrând treptat controlerul locomotivei de pe o poziție pe alta.

Un tren care se deplasează pe șine (în calea de rulare) întâmpină o serie de rezistențe care se opun înaintării. Totalitatea forțelor active care sunt orientate în sensul de mers și care provoacă mișcarea trenului, formează F de tracțiune. În cazul în care $F>R$, adică forța de tracțiune este mai mare decât rezistența la înaintare, atunci are loc accelerația trenului. În cazul în care $F=R$, trenul circulă cu viteză constantă. În cazul în care $F<R$, are loc o scădere a vitezei trenului.

Pentru asigurarea accelerației trenului și a mersului fără smucituri și jocuri longitudinale, mecanicul de locomotivă trebuie să mărească în mod continuu și lent forța de tracțiune, acționând controlerul locomotivei treaptă cu treaptă. Pentru ca locomotiva să poată remorca trenul cu viteză constantă, trebuie să se dezvolte la cârligul de tracțiune o forță egală cel puțin cu rezistența R_v opusă la înaintarea vagoanelor, denumită în continuare forță de tracțiune la cârlig ($F_c=R_v$) dar și la înaintarea lor se opune rezistența locomotive R_L , aceasta însemnând că la obada osiilor motoare, locomotiva trebuie să producă o forță mai mare decât forța de tracțiune la cârlig iar acea forță se numește forță de tracțiune la obadă F_o .

Diferența între forța de tracțiune la obada roții locomotivei și forța de tracțiune la cârlig reprezintă forța suplimentară care se consumă pentru învingerea rezistenței R_L care se opune înaintării locomotivei. Osiile motoare sunt acționate de către motoare care trebuie să producă o forță mai mare decât forța de tracțiune la obadă F_o care este egală cu suma cuplurilor dezvoltate de motoarele de tracțiune ale locomotivei, această forță numindu-se forță de tracțiune indicată F_i . Pentru ca forța de tracțiune la obadă să poată fi realizată, trebuie ca roata să fie apăsată pe șină cu o forță G_o care se numește sarcină verticală pe osie și reprezintă o parte din greutatea locomotivei care apasă pe fiecare roată.

2. Determinarea coeficientului de frecare dintre sabotul de frână și roată

Coeficientul de frecare se poate folosi numai când contactul dintre roată și sabot este considerat punctiform și în situația suspendării sabotului.

$$\mu = F_T / F_N \quad (1)$$

unde: F_T este componenta tangențială a forței produse la contactul dintre cele două suprafețe care alunecă relativ una față de cealaltă și F_N este componenta normală la aceste suprafețe.

În cazul frânei cu saboți este utilizată o altă definiție a coeficientului de frecare dintre roată și sabot:

$$\mu = F_T / P_S \quad (2)$$

unde: F_T este forța de frecare tangențială la roată; P_S este forța de apăsare pe sabot. În cazul efectuării unor măsurători de frânare pe standuri sau pe vehicule în parcurs, în scopul testării acestora, înaintea introducerii în serviciu, pentru determinarea coeficientului de frecare μ se poate utiliza următoarea formulă:

$$\mu_{se} = F_V / P_S \quad (3)$$

în care: μ_{se} este coeficientul de frecare sabot - roată, determinat experimental, F_V este forța care acționează în atârănătorul portsabotului, P_S este forța care apasă pe sabotul de frână, măsurabilă prin diverse procedee, cel mai răspândit fiind cel tensiometric.

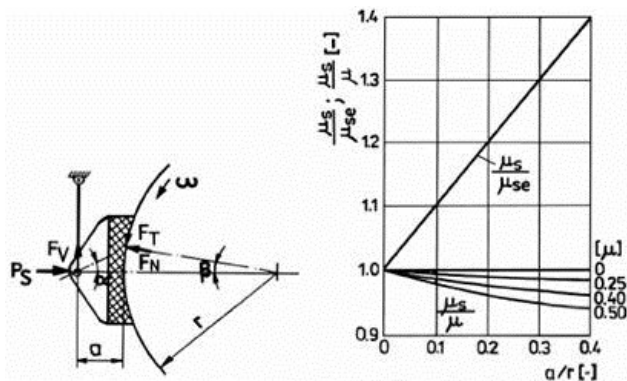


Fig. 1. Schema forțelor de contact roată - sabot de frână și diagrama coeficienților de frecare în funcție de raportul a/r și μ

În figura nr. 1 sunt reprezentate forțele care acționează asupra roții frânate cu saboți, iar notațiile utilizate au următoarea semnificație: β este unghiul dintre orizontală și direcția normalei la suprafața de contact roată - sabot; a reprezintă distanța dintre centrul articulației atârănătorului portsabotului și tangenta la suprafața de contact; r este raza roții frânate cu saboți.

Expresiile prezentate anterior pentru diferite valori ale raportului a/r conduc la valori diferite ale coeficientului de frecare. Osia montată a vehiculelor feroviare formează un corp de revoluție, a cărei axă de revoluție corespunde cu axa geometrică a osiei propriuzise. Pentru definirea poziției osiei montate în calea de rulare, am convenit ca planele paralele cu axa de revoluție a osiei se consideră plane meridiane, iar planele perpendiculare pe aceasta, plane paralele. Pentru asigurarea ghidării osiei montate în calea de rulare bandajele au un profil special cu o suprafața de rulare având o anumită conicitate și o buză la partea dinspre interior a suprafeței de rulare, iar distanța dintre planele interioare ale șinelor de cale este mai mare decât distanța dintre flancurile exterioare ale buzelor bandajelor. Între buza bandajului și șină, chiar la mersul în aliniament, trebuie să existe un joc, în caz contrar existând pericolul înțepenirii osiei montate în cale și/sau a deraierii. În timpul rulării osiei montate în cale, planul meridian vertical al osiei nu se confundă întotdeauna cu planul vertical perpendicular pe cele două fire ale căii de rulare, între aceste două plane putând exista un unghi oarecare α denumit unghi de atac. Unghiul de atac poate fi pozitiv, dacă planul vertical median este rotit în antitrigonometric (sensul acelor de ceasornic), sau negativ pentru sensul trigonometric. Unghiul de atac rotit în sens trigonometric față de planul vertical, este perpendicular pe cele două fire ale căii de rulare. Din cauza jocului osiei montate în cale, la osia montată aflată în poziție de atac, atacul se produce prin contactul buzei roții (bandajului unei roți) și șina respectivă. Roata care are tendința de a se apropia cu buza de șină se numește roată atacantă iar cealaltă roată, care are tendința de a se depărta se numește roată neatacantă. Contactul dintre roata atacantă și șină se poate realiza în două puncte, sau într-un singur punct.

În mod simplist se poate imagina că roțile locomotivei, prin rotire și datorită aderenței, au tendința să deplaseze șinele înapoi, dar șinele sunt însă fixate în patul de balast al prismeii căii pe traverse și atunci, roțile sprijinindu-se de șină, deplasează locomotiva înainte. Rezultă

de aici că reacțiunea orizontală a șinei F'_0 se comportă ca un fel de opritor în care roata împinge cu o forță egală cu mărimea forței de tracțiune la obada F_Q . Dacă mecanicul de locomotivă manipulând controlerul, mărește forța de tracțiune la obadă F_0 , atunci în aceeași măsură se mărește și reacțiunea orizontală a șinei de cale F'_0 . Reacțiunea șinei F'_0 , precum și forța de tracțiune se pot mări însă, doar până la o mărime care să nu depășească aderența F_a a roții pe șină. În cazul când reacțiunea orizontală a șinei de cale este egală sau mai mică decât forța de aderență a roții pe șină, adică: $F_0 \leq F_a$, roata are sprijinul necesar și se rostogolește în mod normal pe șină. Îndată ce mărimea forței de tracțiune la obadă (deci și reacțiunea șinei) devine mai mare decât forța de aderență $F_0 > F_a$, roata nu mai are sprijin suficient, așa încât roata se va roti în jurul axei sale, alunecând pe șine, fenomenul fiind cunoscut în literatura de specialitate sub titulatura de patinare.

Deoarece în timpul patinării frecarea dintre roți și șine este relativ redusă, forța de tracțiune la obada osiei care patinează scade brusc, iar mersul locomotivei se produce numai pe seama forței de tracțiune a celorlalte osii. Neavând sprijin suficient, osiile care patinează ating turații foarte mari. Această patinare uzează intens bandajele și provoacă chiar flamarea colectorului și intrarea în funcțiune a releului de suprasarcină a motorului electric de tracțiune respectiv. În cazul când patinarea se menține, în special pe rampe aspre, trenul se poate opri, provocând perturbații în graficul/programul de circulație al trenurilor. La stabilizarea aderenței roților care patinează, crește brusc forța de tracțiune a locomotivei, ceea ce poate provoca ruperea trenului.

Pentru oprirea patinării trebuie micșorată forța de tracțiune, ceea ce se realizează automat prin instalația de antipatinaj, care pe cale electrică reduce tensiunea aplicată motoarelor de tracțiune, iar pe cale mecanică frânarea reostatică. La o anumită greutate aderentă G , mărimea maximă a forței de tracțiune este dependentă de mărimea coeficientului de aderență j . Coeficientul de aderență maxim este realizat de locomotivă la remorcarea unui tren de mare tonaj, pe rampa maximă, adică atunci când forța de tracțiune este maximă. Prin caracterul sau, coeficientul de aderență se deosebeste foarte puțin de coeficientul de frecare de alunecare al roții pe șină la o viteză apropiată de zero, respectiv la demaraj. Pentru calculele de tracțiune, coeficientul de aderență j reprezintă raportul dintre forța maximă de tracțiune, realizabilă în mod sigur în condițiile de exploatare (fără patinare) și greutatea aderentă a locomotivei, adică:

$$\varphi = \frac{F_{\max}}{G} \quad (4)$$

Coeficientul de aderență se exprimă printr-un număr abstract, ee exemplu, locomotiva 060 EA, având o greutate aderentă $G = 126$ [tf], la remorcarea unui tren în rampă realizează o forță de tracțiune la obadă: $F_{\max} = 28$ [tf], adică un coeficient de aderență:

$$\varphi = \frac{F_{\max}}{G} = \frac{28}{126} = 0,22 \quad (5)$$

În laborator se poate obtine un coeficient de aderență $j=5$, iar în practică, în cele mai favorabile condiții, el nu depășește valoarea $j=0,5$ care este obișnuită în exploatare, pe suprafețele de contact dintre roată și șină, găsindu-se diferite impurități (ulei, praf de cărbune, pojghiță de polei etc.) de natură să micșoreze coeficientul de aderență la $j=0,1$ și chiar sub această valoare. Coeficientul de aderență la demaraj este $j_{\text{dem}}=0,3$.

Modul cel mai general de frânare a vehiculelor de cale ferată îl constituie apăsarea saboților asupra roților. Prin apăsarea saboților cu forța K asupra roții aflate în mișcare, ia naștere o forță de frecare $F_f = \mu_K$, îndreptată în sens invers rotirii roții. Forțele care acționează asupra unui vehicul feroviar în timpul frânării în pantă de declivitate $i\%$, cât și rezistența de

rostogolire dar și forța cauzată de frecarea dintre saboți și roți F_f , determină în centrul osiilor componentele R_{vr1} , R_{vr2} și F_{f1} , F_{f2} , îndreptate în sens contrar mișcării. Rezistențele datorate aerului și pantei induc în centrul osiilor componentele R_{va1} , R_{va2} și R_{vi1} , R_{vi2} inclusiv momente de rotire care se echilibrează de către cuplurile date de reacțiunile șinelor.

$$F_{iv} = (1 + \zeta_v) \frac{G_v I_v}{g} \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

Forța de inerție care acționează asupra vehiculului determină în axul osiilor componentele F_{iv1} și F_{iv2} , inclusiv un moment de rotire care este echilibrat de cuplul dat de reacțiunile din partea șinelor.

$$\Delta Q_{iv} = F_{iv} \frac{h_v}{a} \quad (7)$$

Ecuatia mișcării:

$$\Sigma F = F_{iv1} + F_{iv2} + R_{vi1} + R_{vi2} - (F_{f1} + F_{f2} + R_{v1} + R_{v2}) = 0 \Rightarrow R_{iv} = F_f + R_{vi} \quad (8)$$

$$\text{unde: } R_{vi} = R_{v1} + R_{v2} = R_{vr1} + R_{va1} + R_{va2} - R_{vi1} - R_{vi2} \quad (9)$$

Rezultă deci că forța de inerție, care crește direct proporțional cu accelerația, trebuie să fie echilibrată de forța de frânare pentru menținerea constantă a vitezei trenului, iar în cazul când se necesită oprirea trenului, forța de frânare trebuie să depășească forța de inerție.

Aceste aspecte conduc la o repartitie și evoluție neuniformă a forțelor de frânare în corpul trenului, cu deosebire în primele faze ale acesteia, ceea ce amplifică reacțiunile dinamice longitudinale dintre vehiculele trenului aflat în regim de frânare. Atunci când vehiculele sunt echipate și cu sisteme complementare de frânare, acțiunea acestora limitată pe durata frânării, amplifică cu atât mai mult neuniformitatea repartizării forțelor de frânare dezvoltate în corpul trenului, în special frâna cu patină electromagnetică.

Aceste forțe pot atinge în anumite condiții valori importante, devenind periculoase din punct de vedere al siguranței circulației. După cum s-a precizat, principalul scop al lucrării în ansamblu este acela de a studia acțiunile dinamice care se dezvoltă asupra materialului rulant în timpul frânării și de a cerceta cauzele care le generează pentru a stabili condițiile care trebuie respectate pentru realizarea unor frânări corecte și sigure. În această etapă s-a pornit de la teoria generală *Karvatki* a frânării trenului, privind dinamica longitudinală a trenului aflat în regim de frânare, în care se evidențiază patru faze ale frânării.

Faza I durează din momentul comandării acțiunii de frânare până când începe să intre în acțiune frâna ultimului vehicul din tren. Durata primei faze a frânării coincide cu timpul necesar propagării unde de frânare în lungul trenului, în acest interval de timp trenul suferind o comprimare care la sfârșitul fazei este maximă și proporțională cu diferența de presiune dintre cilindrii de frâna ai primului, respectiv ultimului vehicul din tren.

Faza a II-a durează de la sfârșitul fazei I până în momentul când în cilindrul de frână al primului vehicul din tren se atinge presiunea maximă. În acest interval de timp, presiunile continuă să crească uniform în toți cilindrii de frână, menținându-se repartitia descrescătoare a presiunilor la vehicule în lungul trenului, acesta rămânând în continuare comprimat. La începutul acestei faze sunt create și condițiile pentru dezvoltarea unei mișcări oscilatorii în lungul trenului, având ca centru de oscilație mijlocul trenului.

Faza a III-a durează de la sfârșitul fazei precedente până când se atinge presiunea maximă în ultimul cilindru de frână al trenului. În decursul acestei faze se ating succesiv presiunile maxime în cilindrii de frână în lungul trenului. Ca urmare a egalizării forțelor de frânare în lungul trenului precum și a faptului că în primele două faze trenul a fost comprimat, pe parcursul fazei a treia se dezvoltă un „recul” succesiv, complet sau parțial, dependent de

caracteristicile de amortizare ale aparatelor de ciocnire. Valoarea maximă a reculului se face simțită la sfârșitul acestei faze.

Faza a IV-a durează de la sfârșitul fazei precedente până la oprirea trenului sau până la comandarea slăbirii frânelor. Deoarece pe toată durata acestei faze presiunile sunt egale și maxime în toți cilindrii de frână în tot lungul trenului, cel puțin teoretic deformarea trenului încetează și nu se mai evidențiază reacțiuni longitudinale.

Considerând că mișcarea oscilatorie care se generează este armonică *Karvatchi*, se poate determina deformarea dinamică totală a trenului ca fiind o mărime periodică, valoarea maximă a reacțiunii pur dinamice care se dezvoltă în corpul trenului obținându-se atunci când comprimarea își atinge maximum. În faza a III-a, pe măsură ce se egalizează presiunile în cilindrii de frână ai vehiculelor din compunerea trenului, forța de frânare își atinge valoarea maximă și energia acumulată în elementele elastice ale aparatelor de ciocnire în primele faze ale frânării (atunci când trenul este comprimat), este redată sistemului cu pierderile corespunzătoare amortizărilor. Se poate considera de asemenea, că forța maximă de întindere a trenului va acționa la sfârșitul fazei a III-a, putând să se manifeste dinamic la începutul celei de a IV-a faze a frânării.

Pentru exemplificare, am efectuat calculul frânei automate a unui vagon de marfă seria Taoos și a unui vagon de marfă seria Rils, conform fișei UIC 544-1, ediția a IV-a.

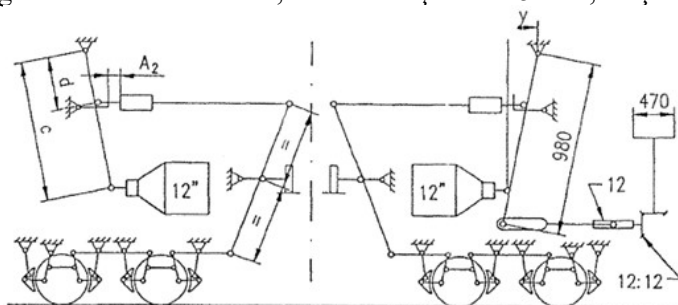


Fig. 2. Schema timoneriei de frână a vagonului de marfă seria Taoos - DB Cargo AG

Date de calcul		Vagon gol	Vagon încărcat
Raport amplific. timonerie boghiu	i_0	4	
Împărțirea levierelor	$a/b \quad c/d$	515/325 840/325	
Raport amplificare timon. vagon	$i = i_0 \times c/d$	10,34	
Aria pistonului cilindrului de frână	$A_C [\text{cm}^2]$	706,9	
Forța antagonista a resortului CF	$F_{rc} [\text{kN}]$	1,4	
Forța antagonistă a regulatorului	$F_{rg} [\text{kN}]$	2	
Randamentul dinamic al timoneriei	D_{din}	0,83	

Tara vagonului	[t]	24
Masa transportată	[t]	54
Masa totală	[t]	80
Viteza maximă de circulație gol/încărcat	[km/h]	120/100
Tipul boghiului		Y25CSII GE DB
Ampatament boghiuri	[m]	14,76

Instalația de frână

Distribuitor de aer	KE 2c SL/C
Cilindru de frână	2x12"
Regulator automat de timonerie	2xDRV 2 A-300
Tipul sabotilor si numarul portsabotilor	P10-S2, $n=16$
Tipul cutiei de comutare	CS4

Masa	G	24	comutare 45	80	t
Presiunea in CF	P_C	1.6		3,8	bar
Forța la tija pistonului	$F_C=2X(P_C \times A_C \times 10^{-3} - f_{rc})$	19.391		49.903	kN
Forța totală/portsaboti	$F_{sd}=(F_C \times i_t - 2i_o \times f_{rg}) \times 0,83$	159.78		421.63	kN
Forța/portsabot	$f_s = F_{sd} / n$	9.986		26.352	kN
Valoarea coeficient K		1.68		1.172	-
Masa frinată a vagonului	$B=(F_{sd} \times K) / 9,81$	27		50	t
Masa de comutare	m_c		45		t
Procentul masei frinate	$P_m(\lambda)=(B \times 100)/G$	112		63	%
Procentul de frinare	$P_f(\zeta)=(F_{sd} \times 100)/(G \times 9,81)$	60		111	%
Inclinare levier, cota y: $y=c_M-i_o(u/2-e)+i_o \times j$		Y=28			mm
Inclinare levier, cota x: $x=c_M \times (a+b)/a-y$		X=110			mm

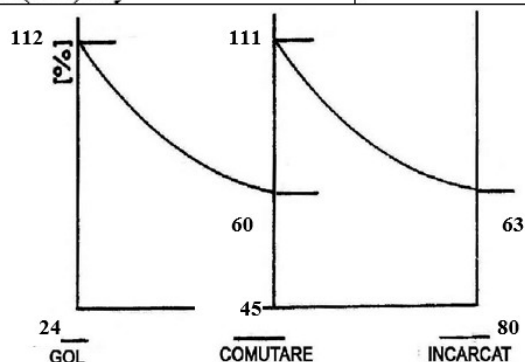


Fig. 3. Diagrama de variație a procentului de masă frânată pentru vagonul de marfă seria Taoos

Capacitatea de încărcare a vagonului de marfă seria Rils (construit după anul 1980) se diminuează pentru liniile secundare (neinteroperabile, de categoria C), de la 80 [t] la 78 [t] pentru a se asigura procentul de masă frânată de minimum 65%, conform fișei UIC 544-1.

Instalația de frână a vagonului de marfă seria Rils	
Distribuitor de aer	KE 1a/3.8 SL
Cilindru de frână	1x16"
Regulator automat de timonerie	DRV 2 AT-600
Tipul sabotilor și numărul portsabotilor	P10-S2, $n=16$
Tipul cutiei de comutare	CS4

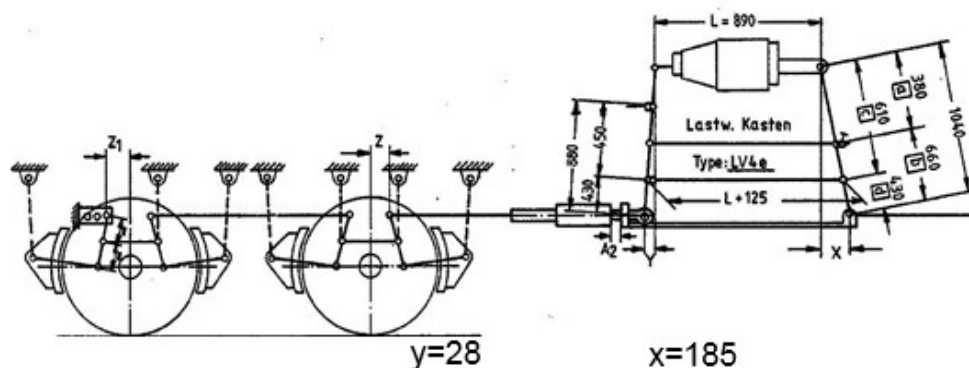


Fig. 4. Schema timoneriei de frână a vagonului de marfă seria Rils

Tara vagonului	[t]	24,5
Masa transportată	[t]	55±0,6
Masa totală	[t]	80
Viteza maximă de circulație gol/încărcat	[km/h]	120/100
Tipul boghiului	Y25CS GE- DB	
Ampatament boghiuri	[m]	14,86

Calcul frânei automate (conform fisei UIC 544-1)					
Masa	G	Vagon gol	comutare		UM
		24,5	44	44	
Presiunea în CF	P_C	3.9	3.9		bar
Forța la tija pistonului	$F_C = P_C \times A_C \times 10^{-2} - f_{pc}$	49	49		kN
Forța totală/portsaboți	$F_{sd} = (F_C \times i_t - 2i_o \times f_{rg}) \times 0,83$	173.8	448.3		kN
Forța/portsabot	$f_s = F_{sd} / n$	10.86	28.02		kN
Forța medie/portsaboți	$F_{sd \text{ med}} = 1/2(F_{sd \text{ gol}} + F_{sd \text{ inc}})$	311.05			kN
Valoare coeficient K (saboți simpli din fontă)		1.646	1.132		-
Masa frânată a vagonului	$B = (F_{sd} \times K) / 9,81$	29	52		t
Valoarea cifrei de comutare	$C = F_{sd \text{ med}} \times K_{med} / 9,81$	44.04			-
Procentul masei frânate	$P_m (\lambda) = (B \times 100) / G$	118	65		%
Procentul de frânare	$P_f (\zeta) = (F_{sd} \times 100) / (G \times 9,81)$	72	57		%
Înclinare levier, cota y: $y = c_M - i_o(u/2 - e) + i_o \times j$		Y=28			mm
Înclinare levier, cota x: $x = c_M \times (a+b)/a - y$		X=185			mm

Date de calcul		Vagon gol	Vagon încărcat
Raport amplificare timonerie	i_o	4	
Impartirea levierelor	$a/b \quad c/d$	380/660	610/430
Raport amplificare timonerie gol	$i = 2 \times i_o \times a/b$	4.606	
Raport amplificare timon. încărcat	$i = 2 \times i_o \times c/d$	11.348	
Aria pistonului cilindrului de frână	$A_c \text{ (cm}^2\text{)}$	1295	
Forța antagonistă a resortului CF	$F_{rc} \text{ (kN)}$	1,5	
Forța antagonistă a regulatorului	$F_{rg} \text{ (kN)}$	2	
Randamentul dinamic al timoneriei	D_{din}	0,83	
Cursa medie a pistonului CF	$c_m \text{ (mm)}$	125	
Uzura luată în calcul	$u \text{ (mm)}$	67	
Jocul între sabot și roată	$j \text{ (mm)}$	8	
Elasticitatea timoneriei de frână	$e \text{ (mm)}$	4,5	

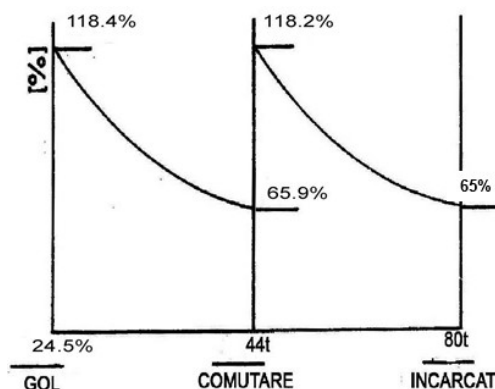


Fig. 5. Diagrama de variație a procentului de masă frânată pentru un vagon de marfă seria Rils - DB Cargo AG

Masele frânate care se incriptionează pe vagon s-au stabilit pe bază de calcul în conformitate cu fișa UIC 544-1, respectiv: Gol: 24,5; Comutare: 44; Încărcat: 52.

3. Controlul aderenței osiilor motoare ale unui vehicul feroviar motor

Mișcarea trenului se consideră aproximată în esență, cu mișcarea dinamică a unui punct material de masă m cu un singur grad de libertate, fiind descrisă prin intermediul ecuației *Newton* în formă scalară. Viteza trenului la circulația în curbă, trebuie să fie limitată pentru a evita o inducere a creșterii componentei forței de conducere pe flancul exterior al șinei de cale, riscând escaladarea firului căii de rulare și deraierea materialului rulant. Forța centrifugă necompensată Y nu trebuie să depășească 150% din greutatea Q a vehiculului, în condițiile în care osiile vehiculului nu sunt aliniate cu direcția curburii căii de rulare.

Pentru exemplificare, s-a considerat un tren de marfă în compunere amestecată, remorcat cu o locomotivă electrică franceză tip Alstom, platforma Astride Danubius, clasa BB 36000.

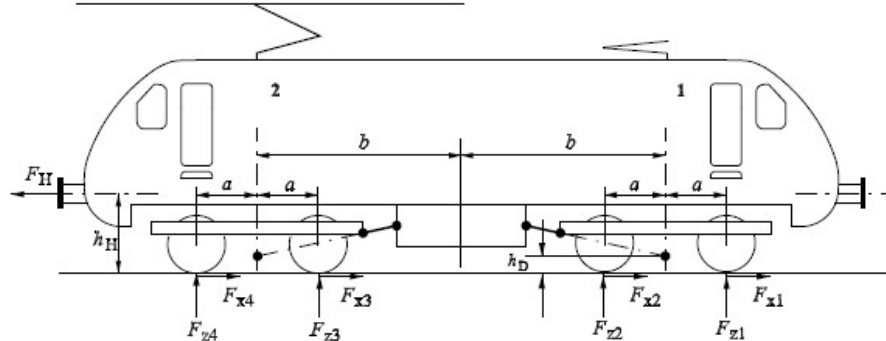


Fig. 6. Imaginea locomotivei electrice clasa BB 36000, platforma Astride Danubius Alstom și schema forțelor care acționează la nivelul osiilor motoare

Diconul planului profilului de rulare la nivelul contactului roată - șină, asigură centrarea osiei între firele căii de rulare, astfel încât buza (buzele roților) să nu atingă aproape niciodată flancul interior al șinei, asigurând așanumita funcție de „diferențial automat” care permite, în curbă, rularea fiecărei roți a osiei, pe un diametru diferit, corespunzător lungimilor de cale distincte. Osiile fiecărui boghiu al locomotivei, fiind grupate, formează un unghi cu direcția radială, crescând riscul exaladării firului exterior al căii de rulare de către acestea și deraierea materialului rulant.

Ecuția dinamică de mișcare a locomotivei poate fi considerată de forma următoare:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m \cdot a \quad (10)$$

Efortul de tracțiune la care este supusă locomotiva $Z=F_{in}$ se calculează din cuplul M_m la arborele motorului electric de tracțiune (multiplicat cu numărul acestora din construcția locomotivei), raportul de transmisie k_G , raza roții r_e (măsurată pe cercul nominal de rulare) și randamentul angrenajului η_G :

$$Z = \eta_G \frac{M_m}{k_G r_e} 10^{-3} \text{ [kN]} \quad (11)$$

Din cauza condițiilor de aderență ale roților din oțel pe șinele din oțel, efortul de tracțiune al locomotivei și efortul de frânare sunt limitate. Această limită este dependentă direct de factorul de aderență și de forța F_{ne} a osiei, fiind perpendiculară pe suprafața de rulare a șinei de cale.

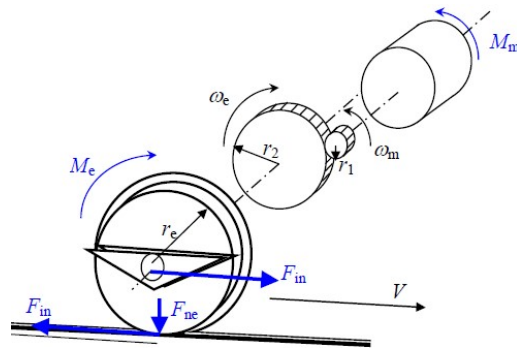


Fig. 7. Schema forțelor de contact roată - șină

Într-o primă aproximare, această forță poate fi considerată ca reprezentând (din punct de vedere cantitativ), un sfert din greutatea unei locomotive cu patru osii, dar nu este o constantă din cauza dinamicii boghiurilor și a cutiei precum și a suspensiilor acestora, atunci când un efort de tracțiune induce un cuplu de rotație la nivelul aparatului de rulare.

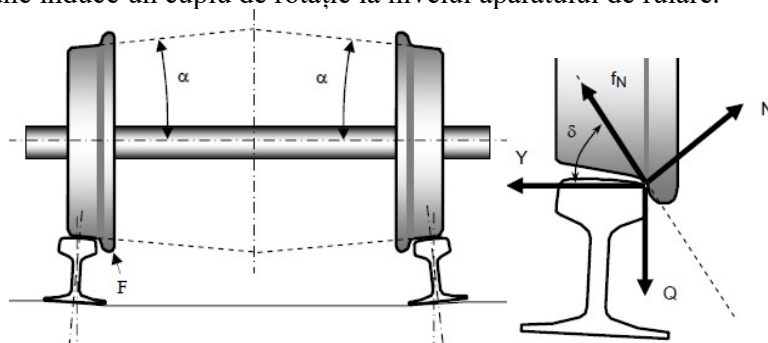


Fig. 8. Schema profilului de rulare roată - șină și forțele de ghidare specifice locomotivei electrice clasa BB 36000

Factorul de aderență depinde de viteza de translație a vehiculului și de viteza de alunecare a roții pe șine, determinându-se din legile mișcărilor empirice.

$$Z < \mu_r \bar{F}_{ne} \quad [\text{kN}] \quad (12)$$

Dacă ultima condiție nu este respectată, osia respectivă începe să alunece. Această mișcare perturbatoare de alunecare (care însoțește mișcarea de rostogolire pură a osiei) va crește dacă locomotiva nu este dotată cu un sistem de antipatinare performant, activ și dacă mecanicul de locomotivă nu ia măsuri de reducere puternic și rapid a cuplului motor al locomotivei. În calcule trebuie ținut cont de limita *Prud'homme*, care poate fi depășită dacă forța centrifugă necompensată Y , depășește valoarea reacțiunii traverselor din patul de balast al suprastructurii căii de rulare.

Roțile au un profil conic de rulare, alcărui un unghi de înclinare față de orizontală (abscisă) este γ . În consecință, șinele de cale sunt montate la un unghi de γ (unde: $\tan \gamma = 0,025 \dots 0,04$). La circulația locomotivei în curbe, oaiile au tendința de deplasare către exteriorul curbei din cauza forțelor centrifuge necompensate, până când porțiunea de linie parcursă pe diametrul cercului de referință mai mare, este egală cu calea mai lungă acoperită de firul exterior al căii de rulare, evitând alunecarea și astfel uzura prematură profilului roții și al buzei de ghidare al roții, cel puțin în zona razelor largi de curbura.

Dacă pe o cale de rulare în aliniament, osia vehiculului este deplasată spre dreapta, atunci roata din dreapta se deplasează în sus și rulează pe un diametru de cerc de referință mai

mare decât stânga, care la rândul său se deplasează în jos, rulând pe un diametru de cerc de referință mai mic și invers. Rotindu-se pe diametrul cercului de referință mai mare, roata dreaptă are o viteză periferică mai mare, rezultând o mișcare a setului de roți spre zona mediană a căii ferate. Această așanumită „funcționare ondulatorie” (aproximată în calcule cu o mișcare sinusoidală), a fost descrisă în 1880 de *Klingel*. Ondulația are o lungime de undă tipică, care rezultă din distanța punctelor de contact ale roții s_1 , raza roții r și înclinarea profilului roții $\tan \gamma$, a cărui unghi se exprimă cu ajutorul ecuației următoare:

$$\lambda = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{s_1 \cdot r}{2 \cdot \tan \gamma}}, \tan \gamma = 0.025 \dots 0.04 \quad (13)$$

Conicitatea roții conduce la centrarea automată a osiei montate în calea de rulare. Pe de altă parte, această resetare dorită determină oscilația transversală a osiilor, a cărei rezistență este dependentă de viteza vehiculului. Frecvența oscilației este $f = v/\lambda$, unde v este viteza de translație a osiei. Astfel, este imperativ în toate circumstanțele ca această frecvență să nu sporească oscilația intrinsecă a osiilor și reacțiuni mari ale șinei de cale. Este cunoscut faptul că în general, frecvența de rezonanță a pendulului mecanic este proporțională cu rădăcina pătrată a coeficientului de rigiditate și masei. Osiile motoare sunt solicitate dinamic de suprasarcini verticale care conduc la limite de frecvență mai mici și la o rigiditate mai mare a suspensiei, ceea ce la rândul său provoacă o rezistență ridicată la retragere și o solicitare sporită care atrage după sine inevitabil, uzuri mai mari, fiind necesar un moment de inerție scăzut.

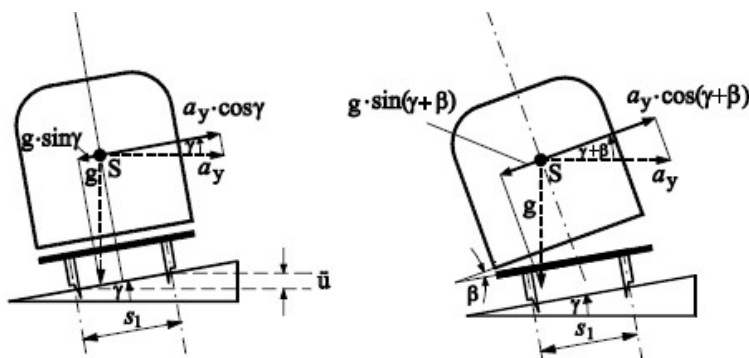


Fig. 9. Forțele și eforturile exterioare care acționează la nivelul cutiei locomotivei la circulația în curbe

Viteza maximă de deplasare în curbe este limitată, pe de o parte, de forțele de contact roată - șină (care provoacă uzuri rapide uzura), pe de-o parte și pe de altă parte (mai important), de efectul asupra confortului. Accelerația centrifugă necompensată care este proporțională cu pătratul vitezei de deplasare al vehiculului motor, se dovedește a fi o perturbare, iar pentru a contracara acest impediment, șina exterioară a căii de rulare este supraînălțată comparativ cu firul interior al liniei, dar din cauza cerințelor de siguranță, aceasta trebuie limitată la o valoare maximă $\ddot{u}=150$ [mm]:

$$a_y = \omega^2 \cdot R = v^2 / R \quad (14)$$

unde: v este viteza de deplasare a locomotivei și R este raza curbei căii de rulare.

În cazul circulației cu viteze sporite în curbe, supraînălțarea firului exterior al căii de rulare devine insuficientă, situație definită de conceptul denumit „insuficiență de supraînălțare”. Echivalarea componentei accelerației centrifuge paralelă cu planul căii de rulare cu componenta accelerației gravitaționale care are aceeași direcție dar este de sens contrar, conduce la scrierea următoarelor ecuații de echilibru dinamic (unde: $g=9,81$ [m/s²] este

accelearația gravitațională, iar S este centrul de masă):

$$g \cdot \sin \gamma = \frac{v^2}{R} \cdot \cos \gamma \quad (15)$$

$$\tan \gamma = \frac{\ddot{u} + \ddot{u}_f}{s_1} \quad (16)$$

$$v = 0,7 s^{-1} \cdot \sqrt{R \cdot (\ddot{u} + \ddot{u}_f)} \quad (17)$$

$$\frac{v}{\text{kph}} = \sqrt{\frac{R / \text{m}}{11,8} \frac{\ddot{u} \cdot \ddot{u}_f}{\text{mm}}} = 4,87 \sqrt{\frac{R}{\text{m}}} \quad (18)$$

Aceasta înseamnă că viteza maximă pentru o rază de curbă de 500 [m] nu poate depăși 110 [km/h]. Dacă cutia locomotivei este rotită de un echipament de înclinare a caroseriei în raport cu nivelul șinei, dependent de curbura, cu un unghi suplimentar $\beta = \arctan\{\delta \ddot{u} / s_1\}$ spre centrul curbei, viteza admisibilă va fi ridicată la valoarea $v_{\text{tilt}} = 145$ [km/h], ceea ce constituie o creștere a vitezei de circulație a locomotivei cu aproximativ 30%.

Ecuția de mișcare privind rezistența de înaintare a trenului are forma:

$$w_r = 1,0 + 0,0025 \cdot v + 4,8 \cdot \frac{n + 2,7}{G_T / \text{kN}} \cdot 0,0145 \cdot (v + 15)^2 \quad (19)$$

Rezistența la înaintare a trenului la circulația în curbe având raza R) este:

$$w_c = \begin{cases} \frac{650}{R / \text{m} - 3} \\ \frac{500}{R / \text{m} - 55} \end{cases} \quad (20)$$

Dacă: $R \geq 300$ [m] și $R < 300$ [m] atunci:

$$w_c = \frac{800}{R / \text{m}} \quad (21)$$

unde: W_r este rezistența la rulare; W_c rezistența curbei de cale; W_{ac} rezistența la accelerație.

$$W = W_r + W_c + W_g + W_a \quad (22)$$

Pentru determinarea rezistenței la accelerație, se adaugă sumativ rezistențelor trenului la circulația acestuia cu viteză constantă și apare în cazul variațiilor de viteză. accelerația trenului este dependentă de masa trenului și este influențată de variația momentelor de inerție centrifugală care sunt influențate la rândul lor de raportul de transmisie și diametrul roților și masa rotativă s_ζ :

$$w_a = \frac{a}{g} \cdot \xi / 1000 (\text{N/kN}) \quad (23)$$

unde: a [m/s^2] este accelerația; $g = 9,81$ [m/s^2] este accelerația gravitațională (constantă) și ξ este un coeficient specific alocat maselor aflate în mișcare de rotație.

Pentru a depăși forțele de rezistență la înaintare ale trenului, vehiculul feroviar motor trebuie să depună eforturi de tracțiune echivalente:

$$F = G_T \cdot w \quad (24)$$

$$\text{Greutatea locomotivei se determină cu expresia: } G_{\text{Loco}} = F_{B1} + F_{B2} \quad (25)$$

$$\text{Se consideră ipotetic faptul că: } F_{x1} = F_{x2} = F_{x3} = F_{x4} = F_{xi} = F_H / 4 \quad (26)$$

Momentul de încovoiere este determinat cu expresia următoare:

$$M_K = F_H \cdot (h_H - h_D) = (F_{zDG2} - F_{zDG1}) \cdot b \quad (27)$$

Momentul de rotație al boghiului (față de axa de simetrie verticală):

$$M_B = \frac{1}{2} F_H h_D = 2 \cdot F_{xi} \cdot h_D = (F_{z2} - F_{z1}) \cdot a = (F_{z4} - F_{z3}) \cdot a \quad (28)$$

unde: $2 \cdot a$ ampatamentul boghiului; F_H este forța de tracțiune la cârlig a locomotivei; $2 \cdot b$ este ampatamentul locomotivei; F_{z1} este forța de greutate a osiei 1; h_D este punctul de atac al forței exercitate de boghiul motor al locomotivei la nivelul contactului roată - șină; h_H distanța de la cârligul de tracțiune la ciuperca șinei (1030 [mm]); F_{z4} forța de greutate a osiei nr. 4 a locomotivei.

Suma forțelor de contact la nivelul boghiului nr. 1:

$$F_{zB1} = \frac{1}{2} \left[G_{Loco} - F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} \right) \right] \quad (29)$$

$$F_{zB2} = \frac{1}{2} \left[G_{Loco} + F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} \right) \right] \quad (30)$$

Forțele de contact ale osiilor motoare:

$$F_{z1} = \frac{1}{4} \left[G_{Loco} - F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} + \frac{h_D}{a} \right) \right] \quad (31)$$

$$F_{z2} = \frac{1}{4} \left[G_{Loco} - F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} - \frac{h_D}{a} \right) \right] \quad (32)$$

$$F_{z3} = \frac{1}{4} \left[G_{Loco} + F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} - \frac{h_D}{a} \right) \right] \quad (33)$$

$$F_{z4} = \frac{1}{4} \left[G_{Loco} + F_H \left(\frac{h_H - h_D}{b} + \frac{h_D}{a} \right) \right] \quad (34)$$

Din echilibrul de forțe la nivelul boghiului, se determină faptul că există un punct de atac în care forța este diminuată ($h_D \Rightarrow 0$, punct de conectare cu pivot scăzut sau „tijă cu tiraj profund”) care conduce transferul de sarcină de la roțile din spate la cele din față ale boghiului, față de sensul de mers al acestuia boghiuri.

4. Controlul aderenței osiilor locomotivei electrice franceze clasa BB 36000, platforma Astride Danubius Alstom, cu puterea de 5600 [kW] și formula osiilor Bo Bo

Valoarea impusă a vitezei de circulație a trenului / locomotivei trebuie întotdeauna dată de o valoare Δv mai mare decât viteza de translație reală v_F , necesară pentru efortul de tracțiune. Transmisia locomotivei este principala legătură cheie între motorul electric de tracțiune și osiile motoare. Locomotiva transmite cuplul motor la accelerare și la frânare de la motorul de tracțiune prin intermediul mecanismului pinion de atac - coroană dințată (calată pe osie). Chiulasa motorului electric de tracțiune (statorul) este montată rigid (semisuspendată) de șasiul cutiei vehiculului, iar rotorul este fixat elastic (semisuspendat) pe arborele osiei motoare. Cuplul motorului este egal cu cuplul osiilor. Pe axul motorului electric de tracțiune este atașat pinionul de atac, care, „se sprijină” pe arborele osiei prin intermediul a două furci („labe”) care asigură astfel distanța constantă a centrului de transmisie a cuplului motor. Pe de altă parte, motorul este suspendat elastic cu arc de cadru șasiului cutiei. Masa nesuspendată a motorului este de aproximativ jumătate din greutatea motorului plus greutatea osiilor, inclusiv coroana dințată. reacțiunile verticale ale șinei sunt transmise sistemului de antrenare a osiilor, oricât de diminuate sunt suprasarcinile dinamice verticale.

Metoda *Hildenbrandt* stabilește maximul coeficientului de aderență prin introducerea

unui semnal de testare a cuplului, oscilând între valorile adimensionale cuprinse în intervalul 5 ... 10 [Hz] și evaluarea cuplului raportat la funcția de transfer față de turația motorului electric de tracțiune al locomotivei. Dacă o singură roată își pierde contactul cu șina, atunci se va induce o oscilație relativă cu frecvența cuprinsă în intervalul de valori (50 ... 65 [Hz]) ambelor discuri de roată, una împotriva celeilalte, care reprezintă un efort extern aplicat sistemului roată - șină și care este de natură să suprasolicite dinamic foarte mult la torsiune, arborele osiei. Acest efect poate fi influențat pozitiv de controlul lunecării (patinării) roții.

Transferul forțelor de frecare *Coulomb* (în cazul lunecării, glisărilor ori patinării osiilor) presupune o diferență a diametrelor pe circumferința profilului de rulare al roții pentru menținerea aceleiași viteze de rulare cu rostogolire a roților (v_U) la mișcarea de rulare cu rostogolire pură a roților aceleiași osii:

$$F_x = f_x (\Delta v, P_1 \dots P_n, v) \cdot G \quad (35)$$

unde: G este forța de greutate a osiei, care acționează pe direcție normală (verticală); F_x este

forța de tracțiune / frânare; $f_x = \frac{F_x}{G}$ este coeficientul de aderență; v_f este viteza de translație;

$v_U = \omega \frac{D}{2}$ este viteza unghiulară a roții (osiei) aflată în mișcare de rotație (rulare cu

rostogolire); $\Delta v = v_U - v_F$ variația de viteză; $s_x = \frac{\Delta v}{v_F} (v_U > v_F)$ coeficientul de alunecare (la

tracțiune) și $s_x = \frac{\Delta v}{v_U} (v_U < v_F)$ coeficientul de alunecare (la frânare).

În plus, f_x va fi redus la negocierea curbelor, deoarece se produce alunecare transversală suplimentară și cu o viteză absolută v , în creștere. Mai mult, există variații dinamice ale forțelor de contact ale roților induse de acțiunea osiilor conducătoare, a boghiului și a căii de rulare, precum și schimbările de cuplu motor care sunt inevitabile, fiind controlate de legăturile clasice ale arborelui cu came al motorului de tracțiune. *Curtius* și *Kniffler* au introdus ecuația curbei de regresie medie:

$$f_x = \frac{7.5}{\frac{v}{\text{kph}} + 44} + 0.161 \quad (36)$$

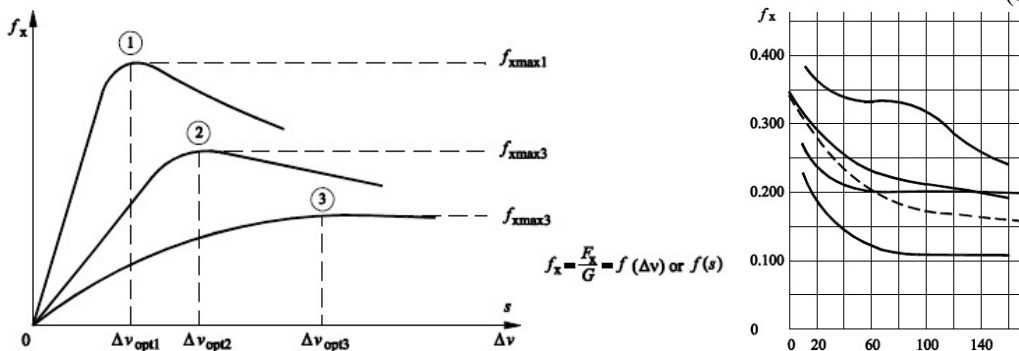


Fig. 10. Diagrama coeficienților de aderență în funcție de măsurătorile *Curtius* și *Kniffler* în funcție de solicitările dinamice la care este supusă osia motoare $f_x = f(\Delta v)$

Pentru determinarea prelungirii neitinerarice a timpilor de mers ai trenului din cauza accelerărilor și frânărilor succesive ale acestuia în timpul mersului, se utilizează ecuația de mișcare a locomotivei / trenului care începe cu o accelerație constantă a_a la viteza maximă (finală) v_m parcurge distanța s_a în timpul $t_a = v_m / a_a$, este dată de formula:

$$s_a = \frac{1}{2} v_m^2 / a_a \quad (36)$$

Pentru aceeași distanță, o locomotivă care circulă cu o viteză constantă v_m , ar avea nevoie doar decantitatea de timp explicitată de ecuația următoare:

$$t_{v=\text{const}} = s_a / v_m \quad (37)$$

Introducerea noilor parametri și a coordonatelor modificate, va produce diferența / variația următoare:

$$t_{vA} = t_a - t_{v=\text{const}} = \frac{1}{2} v_m / a_a \quad (38)$$

Acest timp se numește „întârziere la lansare”. Menținerea intervalului de timp prestabilit pentru deplasarea trenului pe distanța itinerară necesară de parcurs se face ținând cont și de pierderea de timp corespunzătoare pentru frânarea trenului. Pe cale de consecință, timpul total necesar călătoriei pe distanța s , este:

$$t_{\text{tot}} = \frac{s}{v_m} + t_{va} + t_{vb} = \frac{s}{v_m} + \frac{v_m}{2} \left(\frac{a_a + a_b}{a_a \cdot a_b} \right) \quad (39)$$

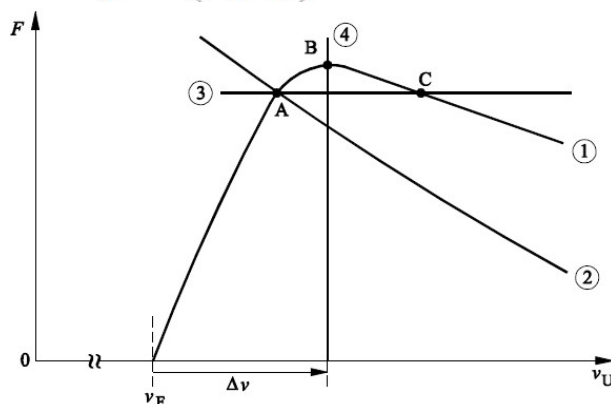


Fig. 11. Diagrama *Hildenbrandt* a caracteristicilor de aderență și de tracțiune

Cel mai important este modul în care acțiunea dinamică a motoarelor electrice de tracțiune induce modificările stocastice ale coeficientului de aderență și astfel, influențând valorile sarcinilor și ale cuplurilor.

Dacă asupra MET se aplică o tensiune U_K , atunci caracteristica de viteză a locomotivei $V_K(I)_{V=ct}$ și forța de tracțiune dezvoltată de MET la obada osiei motoare pentru aceeași tensiune, se determină conform următoarelor expresii:

$$V_K = \frac{U_K - I \Sigma r}{U_n - I \Sigma r} V_n \quad \text{și} \quad F_{omk} = 3,6 \frac{U_K I}{V_k} \eta_{0K} \Rightarrow F_0 = m_e * F_{amk} \quad (40)$$

Coeficientul de aderență Ψ se determină în funcție de viteza v [km/h] de circulație a locomotivei, astfel: atunci:

$$\text{Dacă } v=0-40 \text{ [km/h]} \Rightarrow \Psi = 0,228 + \frac{7}{53+3*v} \quad (41)$$

$$\text{Dacă } v=40-150 \text{ [km/h]} \Rightarrow \Psi = 0,09 + \frac{95}{413+3*v} \quad (42)$$

Ecuația de mișcare a trenului stabilește legătura dintre forța specifică rezultantă care acționează asupra trenului pe direcția de deplasare a acestuia și accelerația ori decelerația trenului la un moment dat de timp, iar dacă m reprezintă masa totală a trenului, atunci această masă include masa totală a vehiculelor remorcate, aflate în compunerea trenului la care este

legată locomotiva la tren și frână, precum și masa echivalentă a momentului de inerție polar al tuturor subansamblurilor din vehiculele aflate în mișcare de rotație din locomotivă, care sunt preluate mecanic de osiile locomotivei, atunci masa mse determină cu expresia următoare:

$$m=(1+\gamma_t) \cdot m_t \quad (43)$$

unde: m_t reprezintă suma dintre masa în stare de serviciu a locomotivei și masa totală a vehiculelor remorcate din corpul trenului; $1+\gamma_t=1,4-1,17$ reprezintă coeficientul supraunitar care ține seama și de masa echivalentă ale momentelor de inerție polare ale tuturor subansamblurilor din vehiculele aflate în mișcare de rotație din locomotivă; coeficientul $1+\gamma_t$ variază conform încercărilor experimentale în funcție de tipul vehiculului remorcat (vagon de marfă încărcat la capacitatea maximă, vagon de marfă gol, vagon de călători gol, vagon de călători încărcat la capacitatea maximă etc). În prezent, în calculele de tracțiune efectuate se consideră că $1+\gamma=1,059$, iar dacă se introduce în ecuația de mișcare coeficientul de masă $1+\gamma$, atunci expresia ecuației de mișcare a trenului capătă forma următoare:

$$a=\frac{dv}{dt} \Rightarrow a=\frac{3,6 \cdot 3,6 \cdot g}{1+\gamma t} \times \frac{F(V)}{G_l+G_v} \quad (44)$$

unde: g [m/s^2] reprezintă accelerația gravitațională în câmp terestru; F este valoarea curentă a forței exterioare care acționează asupra trenului care este o funcție dependentă de variația vitezei a circulației a trenului; G_l [N] este greutatea locomotivei; G_v [N] reprezintă greutatea tuturor vagoanelor remorcate, aflate în compunerea trenului considerat.

Dar $a_s=3,6 \cdot g \cdot 1/(1+\gamma_t)$ reprezintă accelerația specifică și dacă:

$$1+\gamma_t=1,051 \Rightarrow a_s=120 \frac{km(h \cdot h)}{N \cdot kN} \Rightarrow a_s=2 \frac{km(h \cdot min)}{N \cdot km} \Rightarrow \quad (45)$$

$$\Rightarrow a_s=1/30 \frac{km \cdot h \cdot s}{N \cdot kN} \quad (46)$$

$$\text{Dar: } \frac{F(v)}{G_l+G_v}=f(v) \Rightarrow \frac{dV}{dT}=a_s \cdot f(V) \quad (47)$$

Dacă $F(v)>0 \Rightarrow f(v)>0 \Rightarrow dv/dt>0$, atunci mișcarea trenului remorcat de locomotiva considerată se află întrun proces de mișcare accelerată. De asemenea, dacă $F(v)=0 \Rightarrow f(v)=0 \Rightarrow dv/dt=0$, atunci mișcarea trenului remorcat de locomotiva considerată se află întrun proces de mișcare uniformă. Totodată, dacă $F(v)<0 \Rightarrow f(v)<0 \Rightarrow dv/dt<0$, atunci mișcarea trenului remorcat de locomotiva considerată se află întrun proces de mișcare decelerată. De reținut este și faptul că forța totală rezultantă se exprimă în [N] și acționează asupra trenului pe direcția sa de deplasare, iar forța specifică rezultantă în se exprimă în [N/kN] și acționează asupra unității de greutate a trenului pe direcția acestuia de deplasare.

De asemenea, ecuația generală a forței totale generalizate care acționează asupra trenului are expresia următoare:

$$F(V)=F_0(V,k)-(R_t(V)+R'_t(V)+F_f(V, k_1, k_2)+F_i(s)) \quad (48)$$

Totodată, expresia forței totale generalizate care acționează asupra trenului în regim de frânare este de forma următoare:

$$F(V)=\{F_1(V), F_2(V), F_3(V)\} \quad (49)$$

unde: $F_0(V,k)$ [N] reprezintă forța de tracțiune dezvoltată de locomotivă la periferia roților (la obadă) în funcție de viteza de circulație și de poziția controlerului locomotivei (atât timp cât locomotiva activă a trenului circulă în regim de tracțiune); $R_t(V)$ [N] este rezistența totală la mersul trenului în aliniament și palier și în regim de tracțiune (această rezistență acționând asupra trenului numai în intervalele de timp cât locomotiva/trenul circulă în regim de tracțiune); $R'_t(V)$ [N] este rezistența totală la mersul trenului în aliniament și palier și în regim

fără tracțiune și/sau cu frânare; $F_f(V, k_1, k_2)$ [N] reprezintă forța totală de frânare cu care instalația de frână a vehiculului (vehiculelor) din tren acționează în intervalele de timp în care trenul circulă în regim de frânare pentru reducerea vitezei de deplasare sau în vederea opririi; $F_i(s)$ [N] reprezintă forța de natură gravitațională cu care calea de rulare acționează asupra trenului în intervalele de timp cât acesta circulă pe porțiuni de linie cu declivități diferite de 0 (gradient nenul).

Totdată, vectorii componenți ai forței de tracțiune dezvoltată de locomotivă la periferia roților (la obadă) în funcție de viteza de circulație și de poziția controlerului locomotivei, au următoarele expresii:

În regim de tracțiune:

$$F_1(V) = F_0(V, k) - (R_t(V) + F_i(s)) \quad (50)$$

În regim de funcționare al MET fără tracțiune:

$$F_2(V) = -(R'_t(V) + F_i(s)) \quad (51)$$

În regim de frânare:

$$F_3(V) = -(R'_t(V) + F_f(V, k_1, k_2) + F_i(s)) \quad (52)$$

Valoarea forței specifice rezultante generalizate se determină cu expresia următoare:

$$f(V) = \frac{F(V)}{G_t} = f_0(V, k) - (r_t(V) + r'_t(V) + f_f(V, k_1, k_2) + f_i(s)) \quad (53)$$

unde: $f_0(V, k)$ [N/kN] reprezintă forța specifică de tracțiune care acționează asupra trenului în intervalele de timp în care trenul merge în regim de tracțiune; $r_t(V)$ este rezistența specifică la mersul trenului în aliniament și palier în regim de tracțiune, $r'_t(V)$ este rezistența specifică la mersul trenului în aliniament și palier în regim fără tracțiune sau în regim de frânare; aliniament în regim de tracțiune, respectiv în regim fără tracțiune sau regim de frânare; $f_f(V, k_1, k_2)$ [N/kN] reprezintă forța specifică a trenului cu care instalațiile de frânare acționează asupra unității de greutate a trenului; $f_i(s)$ [N/kN] este forța specifică indusă de declivitățile elementelor de profil simplificat atunci când trenul circulă peste elementele de declivitate, forță având aceeași valoare identică cu valoarea declivității elementelor de profil simplificat, cu diferența că declivitatea se măsoară în [mm/m], iar forța se măsoară în [N/kN], simbolul acestei forțe incluzând și semnul declivității.

Pentru calculul forțelor specifice sunt utilizate următoarele formule empirice:

$$f_0(V, k) = \frac{F_0(V, k)}{G_t} \quad \text{și} \quad r_t(V) = \frac{R_t(V)}{G_t} \quad \text{respectiv} \quad r'_t(V) = \frac{R'_t(V)}{G_t} \quad (54)$$

$$\text{De asemenea: } f_f(V, k_1, k_2) = \frac{F_f(V, k_1, k_2)}{G_t} \quad \text{și} \quad G_t = G_l + G_v \quad (55)$$

Particularizând pentru fiecare regim de funcționare al MET, expresiile vectorilor componentelor forței de tracțiune capătă expresiile canonice următoare:

$$f(V) = \{f_1(V), f_2(V), f_3(V)\} \quad (56)$$

În regim de tracțiune:

$$f_1(V) = f_0(V, k) - (r_t(V) + f_i(s)) \quad (57)$$

În regim de funcționare al MET fără tracțiune:

$$f_2(V) = -(r'_t(V) + f_i(s)) \quad (58)$$

În regim de frânare:

$$f_3(V) = -(r'_t(V) + f_f(V, k_1, k_2) + f_i(s)) \quad (59)$$

$$\text{Dacă: } f_p(V) = \{f_{p1}(V), f_{p2}(V), f_{p3}(V)\} \quad \text{și} \quad f_{p1}(V) = f_0(V, k) - r_t(V) \quad \text{respectiv:} \quad (60)$$

$$f_{p2}(V) = -r'_t(V) \quad \text{și} \quad f_{p3}(V) = -f_f(V, k_1, k_2) \quad (61)$$

unde: $f_{p1}(V)$ reprezintă forța specifică ce acționează asupra trenului la mersul în regim de

tracțiune; : $f_{p2}(V)$ reprezintă forța specifică ce acționează asupra trenului la mersul în regim fără tracțiune; : $f_{p3}(V)$ reprezintă forța specifică ce acționează asupra trenului la mersul în regim de frânare.

Calculul forțelor specifice se efectuează cu formulele următoare:

$$r_t' = \frac{r_l * G_l + r_v * G_v}{G_l + G_v} \text{ [N/kN]} \quad \text{și} \quad r_t = \frac{r_l * G_l + r_v * G_v}{G_l + G_v} \text{ [N/kN]} \Rightarrow \quad (62)$$

$$\text{Dar:} \quad dt = \frac{1}{a_s} * \frac{dV}{f(V)} \Rightarrow \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \frac{1}{a_s} * \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{dV}{f(V)} \quad (63)$$

$$\text{De asemenea:} \quad \Delta t_{k+1,k} = t_{k+1} - t_k \Rightarrow \Delta t_{k+1,k} = \frac{1}{a_s} * \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{dV}{f(V)} \quad (64)$$

$$\text{Totodată:} \quad ds = V * dt \Rightarrow ds = V * \frac{1}{a_s} * \frac{dV}{f(V)} \Rightarrow \quad (65)$$

$$\Rightarrow \int_{s_k}^{s_{k+1}} ds = \frac{1}{a_s} * \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{V * dV}{f(V)} \quad (66)$$

$$\text{Dar:} \quad \Delta s_{k+1,k} = s_{k+1} - s_k \Rightarrow \Delta s_{k+1,k} = \frac{1}{a_s} * \int_{v_k}^{v_{k+1}} \frac{V * dV}{f(V)} \quad (67)$$

unde: k reprezintă momentul, timpul, poziția trenului la începutul integrării; $k+1$ este momentul, timpul, poziția trenului la sfârșitul integrării; $f(V)$ reprezintă valoarea momentană a forței specifice rezultante care acționează asupra trenului, în condițiile în care este cunoscut faptul că forța de acțiune depinde de tonajul trenului, de poziția controlerului de comandă a locomotivei, de tipul și de valoarea declivității efective pe care circulă trenul, precum și că regimul de mers al trenului poate fi regim de tracțiune, regim fără tracțiune, regim de frânare și că forța de frânare poate fi dependentă de viteza de circulație, de tipul instalației de frână, de poziția robinetului mecanic pentru comanda frânei pneumatice / electrodinamice.

Pentru a fi posibilă integrarea ecuației de mișcare a trenului în vederea determinării curbelor $V(s)$ și $t(s)$, variațiile infinit zecimale dt , dV și ds se înlocuiesc cu parametrii Δt , ΔV și Δs , iar valoarea curentă efectivă, momentană a forței specifice rezultante, care acționează asupra trenului se înlocuiește cu valoarea sa medie de pe pasul de integrare respectiv, pas căruia îi corespund parametrii Δt , ΔV și Δs și astfel:

$$\frac{\Delta V_{k,k+1}}{\Delta t_{k,k+1}} = a_s * f_{k,k+1} \quad (68)$$

unde: k reprezintă $\Delta V_{k,k+1}$ reprezintă variația de viteză a trenului de la momentul de început al pasului de integrare la momentul de sfârșit al pasului de integrare iar $\Delta t_{k,k+1}$ reprezintă variația de timp de la momentul de început al pasului de integrare la momentul de sfârșit al pasului de integrare.

De reținut este faptul că în cadrul metodei de integrare aproximativă, se poate recomanda ca valoarea intervalelor de viteză care pot fi utilizate să nu depășească intervale de viteză superioare valorii de 10 [km/h], neputând cuprinde puncte din caracteristica forței specifice $f_{p1}(V)$ în care curba forței specifice își modifică variația, iar pentru mersul trenului în regim fără tracțiune, valoarea vitezei de circulație a trenului ar trebui să fie de maxim 10 [km/h], iar pentru regim de frânare de maxim 5 [km/h].

$$\Delta t_{k,k+1} = t_{k+1} - t_k \Rightarrow \Delta t_{k,k+1} = \frac{1}{a_s} * \frac{1}{f_{k,k+1}} \int_{v_k}^{v_{k+1}} dV \Rightarrow \quad (69)$$

$$\Rightarrow \Delta t_{k,k+1} = \frac{1}{a_s} * \frac{V_{k+1} - V_k}{f_{k,k+1}} \quad (70)$$

$$\text{Dar: } t = t_0 + \sum_{k=0}^n \Delta t_{k,k+1} \Rightarrow \quad (71)$$

$$\Rightarrow \Delta t_{k,k+1} = \frac{1}{2} * \frac{V_{k+1} - V_k}{(f_0 - r_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul de tracțiune, în [minute]} \quad (72)$$

$$\Delta t_{k,k+1} = \frac{1}{2} * \frac{V_{k+1} - V_k}{-(r'_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul fără tracțiune, în [minute]} \quad (73)$$

$$\Delta t_{k,k+1} = \frac{1}{2} * \frac{V_{k+1} - V_k}{-(f_f + r'_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul de frânare, în [minute]} \quad (74)$$

$$\text{De asemenea: } s = s_0 + \sum_{k=0}^n \Delta s_{k,k+1} \Rightarrow \quad (75)$$

$$\Rightarrow \Delta s_{k,k+1} = 4,17 * \frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{(f_0 - r_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul de tracțiune, în [m]} \quad (76)$$

$$\Delta s_{k,k+1} = 4,17 * \frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{-(r'_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul fără tracțiune, în [m]} \quad (77)$$

$$\Delta s_{k,k+1} = 4,17 * \frac{V_{k+1}^2 - V_k^2}{-(f_f + r'_t)_{k,k+1} - f_i} \quad \text{pentru regimul de frânare, în [m]} \quad (78)$$

unde: t [minute] reprezintă timpul; s [m] reprezintă distanța totală parcursă de tren; t_0 este baza timpului de mers iar s_0 este poziția de referință a trenului considerat.

Deplasarea trenului în intervalele de timp în care acesta circulă în regim fără tracțiune se desfășoară în conformitate cu următoarea ecuație de mișcare:

$$\frac{dV}{dt} = a_s * f \Rightarrow \frac{dV}{dt} = a_s * (r'_t + f_i) \quad (79)$$

unde: dV/dt reprezintă accelerația trenului; a_s [km/h²] este accelerația specifică a trenului; f este forța specifică rezultantă care acționează asupra trenului la mersul în regim fără tracțiune; r'_t este rezistența specifică la circulația trenului în aliniament și palier în regim fără tracțiune; f_i este forța specifică de natură gravitațională introdusă de declivitatea elementului de profil pe care circulă trenul.

Dacă $f=0$, atunci trenul are o mișcare uniformă. Dacă din calcule a rezultat faptul că $f < 0$ adică are o valoare negativă, atunci $dV/dt < 0$ și mișcarea trenului considerat este una decelerată. De reținut mai este și faptul că și în situația în care mișcarea trenului în regim fără tracțiune este decelerată, acest gen de remorcare nu poate fi utilizat pentru reducerea vitezei de circulație a trenului în scopul respectării vitezei din livretul de mers sau BAR-ul decadic și nici pentru oprirea trenului la punct fix (semnale care ordonă oprirea fără a fi depășite ori în punctele de secționare precum stațiile CF ori haltele de mișcare în care trenul are oprire itinerară în conformitate cu graficul de circulație), dar nici pentru menținerea vitezei de circulație dacă trenul intra pe o porțiune de linie cu declivitate având un gradient mare, a cărui valoare depășește valoarea rezistenței specifice r'_t .

Calculul drumului de frânare s_f (cunoscut în literatura de specialitate din România și sub titulatura de spațiu de frânare) se face în regimurile de frânare totală sau în regimurile de frânare de rapidă ori de urgență.

Drumul de frânare $s_f=400$ [m] pe căile ferate înguste (cu ecartamente $e=760$ [mm] sau $e=1000$ [mm]) în cazul trenurilor care sunt echipate cu frână pneumatică automată cu acțiune rapidă și apte să circule cu viteza maximă $V_{fmax}=45$ [km/h], ca și pentru trenuri echipate cu frână pneumatică automată cu acțiune înceată și $V_{fmax}=45$ [km/h].

Drumul de frânare $s_f=700$ [m] pe căile ferate cu ecartament normal ($e=1435$ [mm]) pentru trenuri echipate cu frână automată utilizată în regim R (rapid), caracteristic trenurilor de călători care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=120$ [km/h], precum și în cazul trenurilor

echipate cu frână automată utilizată în regim G (greu), caracteristic trenurilor de marfă care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=90$ [km/h].

Drumul de frânare $s_f=1000$ [m] pe căile ferate cu ecartament normal ($e=1435$ [mm]) pentru trenuri echipate cu frână automată utilizată în regim R (rapid), caracteristic trenurilor de călători care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=140$ [km/h], precum și în cazul trenurilor echipate cu frână automată utilizată în regim G (greu), caracteristic trenurilor de marfă care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=100$ [km/h].

Drumul de frânare $s_f=1200$ [m] pe căile ferate cu ecartament normal ($e=1435$ [mm]) pentru trenuri echipate cu frână automată utilizată în regim R (rapid), caracteristic trenurilor de călători care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=160$ [km/h], precum și în cazul trenurilor echipate cu frână automată utilizată în regim G (greu), caracteristic trenurilor de marfă care circulă cu viteza maximă $V_{fmax}=120$ [km/h].

Forța specifică de frânare f_f [N/kN] care acționează asupra trenului, se determină cu ecuația de mișcare a trenului pentru mersul trenului în regim de frânare:

$$f_f = 1000 \cdot \beta \cdot \mu(P_s, V) \cdot \frac{b}{k} \text{ [N/kN]} \quad (80)$$

unde: β este un coeficient care desemnează intensitatea medie a procesului de frânare comandat de la începutul până la sfârșitul acestuia, $\beta=0,25 \div 0,75 \Rightarrow \beta \approx 0,5$; μ este coeficientul mediu de frânare a saboților de frânare pe suprafața de rulare a roților (în cazul roților cu bandaje sau a placuțelor de frână în cazul frânei cu disc și de viteza de circulație, $\mu(P_s, V)$; b (%) reprezintă procentul de masă franată a trenului și este un coeficient introdus în formulele de calcul sub formă de fracție zecimală; k este coeficientul de calitate a frânei a cărei valoare este: $k=10/7$ pentru regimul de frânare greu de marfă tip G și $k=10/8$ în cazul regimului de frânare la trenurile călători tip P (persoane).

În timpul circulației trenului în general, regimurile de frânare sunt hotărâte și comandate de mecanicul de locomotivă în funcție de necesități, de configurația și tipul trenului, de regimul de viteză de circulație, precum și de situația efectivă din momentul care determină folosirea regimului de frânare. Chiar și pentru oprirea trenului la punct fix (la semnale care ordonă oprirea fără a fi depășite sau în punctele de secționare în care trenul are oprire itinerară în conformitate cu graficul în stații CF și/sau halte de mișcare), se folosesc frânări ordinare în trepte și din acest motiv, valoarea coeficientului β din formula de calculul pentru parametrul f este subunitară. În cazul frânărilor în trepte ordinare, valoarea medie a coeficientului de intensitate medie a procesului de frânare, este cuprinsă în intervalul $\beta=0.25 \div 0.75$. În calculele de tracțiune, în situațiile/cazurile medii sau neprecizate, valoarea coeficientului se adoptă a fi $\beta=0,5$.

Pentru cazul în care trenul circulă în regim de frânare, intervalul de spațiu realizat (distanța parcursă) pe durata unui pas de integrare de la valoarea k la valoarea $k+1$, se determină utilizând metoda de integrare analitică:

$$\Delta s_{k,k+1} = 4,17 \cdot (V_{k+1}^2 - V_k^2) / \{ -[(f_f + f'_t)_{k,k+1} + f_i] \} \Rightarrow \quad (81)$$

$$\Rightarrow \Delta s_{k,k+1} = 4,17 \cdot (V_{k+1}^2 - V_k^2) / [-(f_{p3})_{k,k+1} + f_i] \text{ [m]} \quad (82)$$

unde: $(f_{p3})_{k,k+1}$ [N/kN] reprezintă valoarea medie a forței specifice f_s rezultante în cazul circulației în aliniament și palier a trenului franat, din intervalul de timp corespunzător pasului de frânare de la valoarea k , până la valoarea $k+1$; f_i este forța specifică de natură gravitațională introdusă de declivitatea elementului de profil pe care se face frânarea pe durata aceluiași pas de integrare.

Drumul de frânare se determină cu formula următoare:

$$s_f = s_p + s_e \text{ [m]} \quad (83)$$

unde: s_p [m] reprezintă spațiul de pregătire (distanța necesar de parcurs) în vederea frânării a frânării; s_e [m] este spațiul (distanța) efectiv de frânare; s_p este distanța parcursă de tren din momentul în care mecanicul de locomotivă a sesizat semnalul de oprire, până în momentul în care în cilindrii de frânare presiunea aerului comprimat (fluidul de lucru) atinge valoarea p_{cf} , respectiv până când forța de apăsare pe roți a saboților de frânare atinge valoarea P_s .

În calculele de franare se considera ca pe durata timpului de pregătire a franarii viteza este constanta și va avea o valoare constanta corespunzătoare, iar ecuația de determinare a spațiului de pregătire a franarii cunoaște următoare expresie:

$$s_p = \frac{V_f}{3,6} \cdot t_p \quad \text{și} \quad s_p = 0,278 \cdot V_f \cdot t_p \quad \text{iar} \quad t_p = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (84)$$

unde: t_p reprezintă timpul necesar pregătirii frânării trenului; p_{cfmax} reprezintă presiunea maximă comandată în cilindrii de frânare ai trenului P_{smax} este forța de apăsare matematică pe saboți; t_1 [s] reprezintă timpul scurs din momentul observării semnalului de oprire până când încep să fie presați pe roți saboții din mijlocul trenului, t_2 [s] este timpul în care presiunea pe aceeași saboți crește de la 0 la P_{smax} .

La Căile Ferate Române se considera că $t_p=6$ [s] pentru frânele tip călători (regimurile P și R) și $t_p=12$ [s] pentru frânele tip marfă (respectiv regimul G).

Curba $f(V)=f_f+r_i'$ de dependență dintre spațiul de pregătire a frânării și viteza de început de frânare este o dreaptă și pentru trasarea acesteia se adoptă încă o valoare pozitivă pentru viteza V_f , după care se împarte domeniul de viteză $V=0 \div V_f$ și se determină viteza medie de circulație pentru fiecare interval de viteză ales, iar de curba f_{p3} se citește valoarea medie a forței specifice $f_s=f_f+r_i'$, corespunzătoare vitezelor medii anterior stabilite, după care se calculează intervalele de spațiu parcurse de trenul considerat, în timpul modificării vitezei de circulație de la valoarea V_k , până la valoarea V_{k+1} , corespunzător fiecărui pas de calcul, pentru n intervale de viteză adoptate între V_f și 0, obținându-se în final n intervale de spațiu efectiv de frânare astfel:

$$s_e = \sum_{i=1}^n s_i \quad \Rightarrow \quad \Delta s_i = 4,17 \cdot \Sigma (V_{2i}^2 - V_{1i}^2) / [-(f_f + r_i')_{12/i}] \quad (85)$$

$$\text{Dar: } s_f = s_p + s_e \quad \Rightarrow \quad s_f = 0,278 \cdot V_f \cdot t_p + 4,17 \cdot \Sigma (V_{2i}^2 - V_{1i}^2) / [-(f_f + r_i')_{12/i} - f_i] \quad (86)$$

unde: V_{1i} este viteza la începutul pasului de integrare i ; V_{2i} este viteza la sfârșitul pasului de integrare i ; $(f_f)_{12/i}$ este valoarea medie a forței specifice f_{p3} pe pasul de integrare i ; iar f_i reprezintă o forță de natură gravitațională.

Pentru determinarea procentului minim necesar de masă franată a trenului considerat, se pleacă de la ipoteza că sunt cunoscute variabilele s_f , V_f și $i=(f_i)$, iar ulterior se calculează și se reprezintă grafic curbele $f(V)=f_f+r_i'$ pentru diverse valori ale procentului de masă franată $b=\{b_1, b_2, \dots\}$, cu $b_1 > b_2 > \dots$ în continuare, pentru aceeași valoare a parametrului f_i dat, se calculează și se trasează diagrama grafică la frânare pentru $b=\{b_1, b_2, \dots\}$, iar pe extremitatea stângă a drumului de franare s_f se plasează sistemul de coordonate $O'V_f s_p$, care are axa $O'V_f$ perpendiculară pe dreapta Os iar segmentul $O's_p$ se poziționează în lungul axei Os , după care se trasează segmentul de dreaptă $s_p(V_f)$, adoptându-se o valoare oarecare (arbitrară) pentru V_f , diferită de 0 (adică nenulă: $V_f \neq 0$). Punctele de intersecție k_1, k_2, k_3 determină viteza de început de frânare V_{f1}, V_{f2}, V_{f3} , precum și valorile spațiilor de pregătire a frânării s_{p1}, s_{p2}, s_{p3} dar și spațiile efective de frânare s_{e1}, s_{e2}, s_{e3} , iar cu ajutorul perechilor de valori $V_{f1}b_1, V_{f2}b_2, V_{f3}b_3$, se trasează diagrama grafică reprezentând curba de variație a vitezei V_f .

La calculul rezistențelor provocate de rostogolirea roților pe șinele căii de rulare, se ține

cont de faptul că roțile vehiculului feroviar motor acționează asupra șinelor de cale cu forțe Q_r ale căror valori sunt mari, precum și de faptul că oțelurile din care sunt confecționate atât roțile vehiculului, cât și șinele au o anumită elasticitate (nefiind perfect rigide), contactul roată - șină se realizează sub forma unei suprafețe eliptice ovale (denumită în continuare elipsă de contact). De asemenea, mărimea elipsei contact depinde de valoarea Q_r , de diametrul D al roții (măsurat pe cercul nominal de rulare), de tipul, natura și de starea prismei căii de rulare (piatra de balast). Totodată, fiind cunoscut și faptul că în timpul deplasării vehiculului în calea de rulare, roțile osiilor au o tendință de împingere pe suprafața de rulare a șinelor de cale, precum și că elasticitatea de material este nesimetrică, iar suprafața de contact roată-șină este asimetric atunci, aceste aspecte fac posibilă deplasarea punctelor A (în care se aplică forțele rezultante de acționare ale șinelor asupra roților), spre sensul de mers față de direcția verticală care trece prin axa de simetrie a osiei, cu o distanță s denumită în continuare brațul frecării de rostogolire.

Dacă se admite că reacțiunea N trece prin centrul O al roții, atunci cuplul M_r [Nm] (dat de forța Q_r în raport cu punctul A, se opune rotirii roții și se determină cu următoarea expresie:

$$M_r = 1000 \cdot Q_r \cdot s \quad (87)$$

unde: Q_r este forța de presare a roții pe șina de cale, iar s reprezintă brațul frecării de rostogolire.

Componenta R_r de la periferia roții a forței de reacțiune a șinei de cale este echilibrată de forța de aderență dintre roată și șina căii de rulare și atunci, din cele două componente rămâne neechilibrată forța de reacțiune R_r , care este plasată în axa osiei, pe direcție paralelă cu planul căii de rulare și este dirijată în sens invers sensului de deplasare al locomotivei (trenului), iar din cuplul determinat cu un cuplu echivalent de forțe de reacțiune (R_r și $-R_r$), rezultă valoarea forței R_r din expresia următoare:

$$R_r = M_r / R \Rightarrow M_r = 1000 \cdot Q_r \cdot s / R \quad (88)$$

Ca urmare a rostogolirii roții pe șina de cale, se reduce rezistența R_r la înaintare, deoarece acționează asupra roții și osiei montate ca o forță exterioară. Această forță presează în plan orizontal asupra palierului prin intermediul cutiei de osie a vehiculului considerat și atunci, pentru un vehicul feroviar motor având un număr de n roți, componenta forței de reacțiune $R_{r/veh}$ de la periferia roții osiei motoare se determină cu expresia următoare:

$$R_{r/veh} = \sum_{i=1-r}^n R_{ri} \Rightarrow R_{r/veh} = 1000 \cdot \sum_{i=1-r}^n Q_{ri} \cdot s_i / R_i \Rightarrow \quad (89)$$

$$\text{Dar: } r_{r/veh} = \frac{R_{r/veh}}{G_{veh}} \Rightarrow R_{r/veh} = \frac{1000}{G_{veh}} \cdot \sum_{i=1-r}^n Q_{ri} \cdot s_i / R_i \quad (90)$$

De reținut este faptul că în condiții medii, componenta $r_{r/vh}$ a forței de rezistență mecanică la înaintare a locomotivei considerate are valoare aproximativă: $r_{r/vh} = 0,3$ [N/kN].

Calculul forțelor de rezistență mecanică la înaintare a locomotivei cauzate de frecarea la nivelul lagărelor palier din cutiile de osii

În cazul vehiculelor feroviare motoare care au cutii de osie cu fus de osie de tip cuzinet de frecare cu ungere (specifice majorității locomotivelor cu abur), valoarea forței F_{fc} de frecare mecanică rezultantă se calculează cu expresia următoare:

$$F_{fc} = 1000 \cdot \mu \cdot Q_f \quad (91)$$

Această forță induce un cuplu rezistent M_{fc} asupra osiei motoare aflată în mișcare în mișcare de roto - translație, cauzat de componenta mișcării de rostogolire a osiei, a cărui

valoare se determină prin calcul cu următoarea expresie:

$$M_{fc} = F_{fc} \cdot d_f / 2 \Rightarrow M_{fc} = 1000 \cdot \mu \cdot Q_f \cdot d_f / 2 \quad (92)$$

Pentru determinarea forței de rezistență mecanică indusă de procesul de frecare dintre lagărele cuzineți și fusurile de osii, se înlocuiește cuplul rezistent M_{fc} cu un cuplu echivalent în forțe de reacțiune (R_{fc} , $-R_{fc}$) în care componentele acestui cuplu echivalent au valori absolute astfel:

$$R_{fc} = \frac{M_{fc}}{D/2} \Rightarrow R_{fc} = 1000 \cdot \mu \cdot Q_f \cdot \frac{d_f}{D}, [N] \quad (93)$$

În eventualitatea că o componentă a cuplului echivalent care acționează la periferia osiei motare, este compensată și echilibrată de către forța de aderență dintre roți și șinele căii de rulare, atunci va rămâne neechilibrată doar componenta R_{fc} a forței de rezistență a la înaintare, care este plasată în axa osiei motoare a locomotivei, pe direcția de deplasare a acesteia, iar această componentă se comportă ca o forță exterioară care se opune înaintării locomotivei pe șine, iar în cazul când vehiculul feroviar motor are un număr de n osii motoare (așa cum este cazul ramelor electrice și al automotoarelor diesel), forța totală indusă de frecarea dintre lagărele cuzineți și fusurile de osie, se determină cu expresia următoare:

$$R_{fc/vh} = \sum_{i=1}^n R_{fci} \Rightarrow R_{fc/vh} = 1000 \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot Q_{fi} \cdot \frac{d_{fi}}{D_i} \quad (94)$$

$$\text{Dar: } R_{fc/vh} = \frac{R_{fc/vh}}{G_{vh}} \Rightarrow R_{fc/vh} = \frac{1000}{G_{vh}} \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot Q_{fi} \cdot \frac{d_{fi}}{D_i} \quad (95)$$

În condiții normale de construcție a vehiculelor și a cutiilor de osie și de ungere a suprafețelor de contact cuzineți - fus, rezistența specifică are valoarea aproximativă de 1 [N/kN].

În cazul cutiilor de osie cu rulment, inelul interior al rulmentului se presează prin fretare pe fusul de osie, iar cel exterior se fixează în corpul cutiei de osie. Inelul interior se învârtă împreună cu osia și pune în mișcare rolele rulmentului. Rolele rulmentului rulând pe fața interioară a inelului exterior execută o mișcare completă, care este formată din mișcarea de rotație în jurul centrului O și din mișcarea de rotație în jurul axelor proprii ale rolelor. În cazul real al rulmentului cu jocul între role și inele, în orice moment sarcina radială pe fus Q_r , măsurată în [kN], se distribuie pe rolele rulmentului din cutia de osie, iar în timpul unei rotații complete a osiei, forța de încărcare radială P_k a unei role k are următoarea evoluție: la intrarea rolei în diedru, forța radială P_k a unei role este nulă ($P_k=0$); odată cu deplasarea rolei în diedru I, forța P_k crește continuu de la valoarea 0, până la valoarea P_{kmax} , în timp ce rola trece prin diedrul II, forța P_k , descrește continuu de la valoarea P_{kmax} până la valoarea 0, iar de la intrarea rolei în diedrul III până la ieșirea rolei din diedrul IV, forța P_k rămâne nulă ($P_k=0$). De asemenea, pentru $\alpha_k \in (0^\circ; 180^\circ)$, sarcina $P_k = P_0 \cdot \cos \phi_k$, valoarea forței P_k se determină cu expresia următoare:

$$P_k = P_0 \cdot \cos \phi_k \quad (96)$$

unde: ϕ_k este unghiul de poziție al rolei k față de rola încărcată la maxim; $P_0 = P_{kmax}$ reprezintă sarcina radială maximă pe rolă, măsurată în [N] și atunci, pentru un rulment cu z role, valoarea P_0 se calculează cu formula experimentală următoare:

$$\text{Dar: } P_0 = P_{kmax} \Rightarrow P_0 = 1000 \cdot 4,6 \cdot \frac{Q_f}{2} \Rightarrow P_0 = 4600 \cdot \frac{Q_f}{2} [N] \quad (97)$$

Totodată, rezistența specifică $r_{fr/v}$ se poate determina cu următoarea formulă:

$$r_{fr/v} = 3,85 * \sqrt{\eta * V * \frac{M_V - 4,8}{M_V}} \quad (98)$$

unde: η [Poise] reprezintă vâscozitatea dinamică a unsorii din cutia de osie, măsurată în; V [m/s] este viteza de circulație a locomotivei considerate; M_V [t] reprezintă masa vehiculului.

Pe durata unei rotații complete a osiei locomotivei, alunecarea efectivă a punctelor din suprafața de contact a roții și cele din suprafața de contact a șinelor se produce pe o distanță $\pi * a = \pi * (D_1 - D)$, iar forța F_{fa} de frecare care acționează în timpul alunecării se determină cu expresia următoare:

$$F_{fa} = 1000 * \mu * Q_r \quad (99)$$

unde: Q_r reprezintă sarcina dinamică verticală exercitată pe roata la contactul roată-șină; μ este coeficientul de frecare din pata de contact.

Lucrul mecanic L_{fa} produs de forța F_{fa} ca urmare a unui printr-un cuplu echivalent de forțe ($F_{fa} - R_{fa}$) din care, forța F_{fa} are punctul de aplicație în centrul roții, iar reacțiunea R_{fa} este situată la periferia contactului roată - șină, adică la obada roții. Reacțiunea R_{fa} este echilibrată de forța de aderență F_{fa} care rămâne neechilibrată, fiind o forță exterioară care se opune deplasării locomotivei aflată în remorcarea trenului considerat.

Lucrul mecanic L_{fa} se determină cu următoarea expresie:

$$L_{fa} = F_{fa} * \pi * a \Rightarrow L_{fa} = 1000 * \mu * Q_r * \pi * a \quad (100)$$

Din cauza inegalității roților, formula generală utilizată pentru determinarea valorii acestei forțe de reacțiune cunoaște expresia următoare:

$$R_{fa/vh} = \sum_{i=1}^{n_a} R_{fai} \Rightarrow R_{fa/vh} = 1000 * \sum_{i=1}^{n_a} \mu_i * Q_{ri} * \frac{a_i}{D_i} \quad (101)$$

$$\text{Dar: } r_{fa/vh} = \frac{R_{fa/vh}}{Q_{vh}} \Rightarrow r_{fa/vh} = \frac{1000}{Q_{vh}} * \sum_{i=1}^{n_a} \mu_i * Q_{ri} * \frac{a_i}{D_i} \quad (102)$$

unde: i reprezintă indicele roții care aluneca în suprafața de contact; n_a reprezintă numărul total de osii montate ale locomotivei, în situația de inegalitate a diametrelor roților, măsurate pe cercurile nominale de rulare; a_i reprezintă diferența de diametru a roților osiei nr. 1; D_i este diametrul nominal al roților osiei i .

Valoarea medie a rezistenței specifice la înaintare a locomotivei cauzată de mișcarea de șerpuire este cuprinsă în intervalul de valori 0,1 ÷ 0,25 [N/kN].

Forța de rezistență la înaintarea locomotivei cauzată de masele de aer dislocuite de locomotivă în timpul circulației acesteia de către suprafața frontală și pereții laterali, se calculează cu formula următoare:

$$R_a = c_x * \rho * A * \frac{V^2}{2} \quad (103)$$

$$\text{Notând: } \alpha = c_x * \frac{\rho}{2} \Rightarrow R_a = \alpha * A * V^2 \Rightarrow r_a = \frac{R_a}{G_{vh}} \Rightarrow \quad (104)$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{\alpha * A}{G_{vh}} * V^2 \quad (105)$$

unde: c_x reprezintă coeficientul adimensional de formă (aerodinamică) al locomotivei; densitatea maximă ρ [kg/m³] de aer admisă în care se deplasează locomotiva; A [m²] reprezintă aria maxim admisă a secțiunii transversale a locomotivei; V [km/h] este viteza de circulație a locomotivei considerate.

În cazul în care trenul se deplasează în condiții în care atmosfera mediului ambiant este deranjată din cauza rafalelor de vânt puternic, atunci peste rezistența la înaintare cauzată de

masele de aer deslocuit în timpul parcursului se suprapune o forță suplimentară cauzată de rafalele de vânt, această forță poate să inducă mărirea valorii rezistenței la înaintare a trenului atunci când vântul bate din lateral spre înapoi și poate contribui printr-o forță la deplasarea trenului, atunci când bate din spate sau din lateral spre înainte. Astfel, viteza de deplasare a trenului remorcat de locomotiva considerată se aproximează cu viteza relativă dintre masa de aer dislocuit de vehiculul feroviar considerat și acesta, luată în modul, obținându-se în final viteza rezultantă dintre aer și tren, cu o componentă pe direcția de deplasare a trenului. În ultimele două situații distincte posibile în circulația trenului, când vântul bate și din lateral, conduc la rezistențe totale la înaintare cauzate atât de dislocuirea maselor de aer cât și cauzate de rafalele de vânt, iar ecuația care exprimă analitic aceste rezistențe este de forma următoare:

$$R_{a+v} = \alpha * A * (V_r * \cos \beta)^2 \Rightarrow R_{a+v} = \alpha * A * (V \pm V_r * \cos \gamma)^2 \text{ [N]} \quad (106)$$

$$\text{unde: } r_{a+v} = \frac{R_{a+v}}{G_{vh}} \quad (107)$$

În cazul apariției forțelor de rezistență la înaintare a trenurilor cauzate de circulația acestora pe porțiunile de linii curbe, se se produc deplasări și frecări suplimentare cauzate de alunecările care apar în aceste situații, atât în ansamblul vehiculului cât și în ansamblul vehiculului de cale ferată. Valoarea acestor rezistențe depinde de supralărgirea căii de rulare în curbe, de lărgimea căii, de ampatamentul vehiculului feroviar și al boghiurilor acestuia, de uzurile suprafețelor de rulare, de viteza de circulație a trenului, de gradul de tensionare al aparatului de tracțiune/legare, precum și de condițiilor atmosferice ale mediului ambiant. Astfel, dacă lungimea trenului este mai mică sau egală cu lungimea curbei, atunci rezistența specifică r_c la înaintare a trenului în curbă este egală cu rezistența specifică calculată r'_c , a cărei formulă cunoaște următoarea expresie:

$$r'_c = \frac{r_c * l_c}{l_t} \quad (108)$$

unde: l_c [m] reprezintă lungimea curbei; l_t [m] este lungimea trenului; r_c este rezistența specifică calculată cu formula experimentală.

Pentru căile ferate din România, formula de calcul pentru rezistența specifică r_c la înaintare a trenului în curbă are expresia:

$$r_c = \frac{k}{R_c - k_1} \quad (109)$$

unde: $k = 800$, iar R_c reprezintă raza curbei căii de rulare.

În cazul care în elementele de profil al căii de rulare, intervin aspecte precum declivitate diferită de zero (adică la gradient nenul), atunci forța de greutate a vehiculului se descompune în două componente, din care una este perpendiculară pe planul căii de rulare, iar cealaltă componentă este paralelă cu planul căii de rulare și este de natură să inducă o forță suplimentară exterioară $F_{i/vh}$, care acționează în centrul de greutate al vehiculului (locomotivei considerate), care se determină cu următoarea expresie:

$$F_{i/vh} = 1000 * G_{vh} * \sin \alpha \quad (110)$$

unde: α reprezintă unghiul de înclinare al elementului de profil față de nivelul mării.

De asemenea, expresia care definește declivitatea elementelor de profil ascultă de formula următoare:

$$i = 1000 * \frac{h_b - h_a}{s} \Rightarrow i = 1000 * \frac{h}{s} \Rightarrow F_{i/vh} = 1000 * G_{vh} * \sin \alpha \Rightarrow \quad (111)$$

$$\Rightarrow F_{i/vh} = 1000 * G_{vh} * i \text{ [N]} \Rightarrow f_{i/vh} = \frac{F_{i/vh}}{G_{vh}} \Rightarrow \quad (112)$$

$$\Rightarrow f_{i/vh} = \frac{G_{vh} * i}{G_{vh}} \Rightarrow f_{i/vh} = i \quad (113)$$

unde: h reprezintă diferența de nivel între cele două puncte extreme; s reprezintă lungimea elementelor de profil măsurate pe direcție orizontală; unghiul α este foarte mic:

$$\alpha = [0^\circ \div 3^\circ] \Rightarrow \sin \alpha \approx \tan \alpha \quad (114)$$

Forța de rezistență specifică suplimentară la circulația vehiculului feroviar pe porțiuni de linie cu declivități având gradient nenul este numeric egală cu declivitatea în sine, diferența constând în faptul că forța specifică se măsoară în [N/kN] iar declivitatea se măsoară în [mm/m].

Totodată, forța de rezistență suplimentară la înaintarea trenului cauzată de mișcarea accelerată a trenului, definită ca fiind forța de inerție R_{ac} a cărei expresie se determină cu următoarea formulă de calcul:

$$R_{ac} = 1000 * \frac{(1+\gamma_t) * G_t * dv}{g * dt} \Rightarrow r_{ac} = \frac{R_{ac}}{G_t} \Rightarrow \quad (115)$$

$$\Rightarrow r_{ac} = \frac{1000 * (1+\gamma_t) * dv}{g * dt} \quad (116)$$

unde: G_t [N] reprezintă forța de greutate a trenului; g [m/s²] este accelerația gravitațională; parametrul $(1+\gamma_t)$ reprezintă factorul de masă (adimensional); derivata de ordinul întâi a vitezei trenului în funcție de timp adică dv/dt [m/s] reprezintă accelerația trenului.

La demararea trenului, pot să apară forțe de rezistență suplimentară din cauza deformării mai pronunțate a suprafețelor de contact roată-șină, din cauza scăderii temperaturii cutiei de osie și a reducerii temperaturii lubrefiantului de ungere, iar dacă toate vehiculele feroviare aflate în compunerea trenului se pun simultan în mișcare, atunci rezistența poate atinge valori mari de până la 20÷30 [N/kN]. Astfel, forțele de rezistență specifice suplimentare, totale la demararea trenului r_{std} [N/kN] se determină cu ajutorul curbelor experimentale $r_{std}(i_d)$ [N/kN] în mod distinct pentru trenurile de marfă și pentru trenurile de călători.

Calculul forței de rezistență specifică la înaintarea trenului din cauza gerului cu temperaturi inferioare valorii de -10°C, se face cu formula următoare:

$$r_g = 0,001 * \theta^2 \quad (117)$$

unde: θ reprezintă temperatura mediului ambiant.

În eventualitatea că locomotiva aflată în remorcarea trenului (legată la tren și frână) este din punct de vedere constructiv dotată cu sisteme suplimentare și instalații care sunt de natură să antreneze osiile motoare cu o putere suplimentară P_{0aux} . (adițională față de puterea instalată din construcția mașinii), atunci:

$$P_{0aux} : R_{aux} = 3600 * \frac{P_{0aux}}{V} [N] \Rightarrow r_{aux} = \frac{R_{aux}}{G_{vh}} \Rightarrow \quad (118)$$

$$\Rightarrow r_{aux} = 3600 * \frac{1}{G_{vh}} * \frac{P_{0aux}}{V} [N/kN] \quad (119)$$

Dacă forța de greutate totală G_t a trenului este o forță compusă din greutatea unui număr finit de vehicule aflate în compunerea trenului și dacă rezistența specifică la înaintare a fiecărui vehicul feroviar din tren se determină cu o formulă specifică, $r_v(V)$, atunci rezistența specifică la înaintare a trenului pe o linie de cale ferată aflată în aliniament și palier se calculează cu expresia următoare:

$$r_v(V) = \frac{\sum_{i=1}^n r_{vi} * G_{vi}}{\sum_{i=1}^n G_{vi}} \Rightarrow r_v(V) = \frac{\sum_{i=1}^n r_{vi} * G_{vi}}{G_v} \Rightarrow \quad (120)$$

$$\Rightarrow r_v(V) = \sum_{i=1}^n r_{vi} * \alpha_i \quad (121)$$

unde: G_{vi} [kN] reprezintă forța de greutate a vehiculului feroviar având numărul i de ordine în funcție de poziția pe care o ocupă în compunerea trenului; r_{vi} este rezistența specifică la înaintarea a trenului la circulația acestuia în aliniament și palier; $\alpha_i = G_{vi}/G_v$ reprezintă coeficientul adimensional de pondere în raport cu forța de greutate a vehiculului feroviar i din tren, în ansamblul rezistențelor specifice de înaintare a trenului

5. Concluzii

Sumativ, factorii de natură să inducă aceste rezistențe la înaintare a trenului fac practic imposibilă găsirea unei formule general valabile pentru studierea parametrilor locomotivei.

Din punctul de vedere al studiului dinamicii longitudinale, cele mai importante caracteristici constructive sunt cele referitoare la sistemul de frânare al vehiculului. În ceea ce privește frâna de bază, este de mare importanță tipul acesteia, frâna indirectă cu aer comprimat sau electropneumatica, în acest ultim caz intrarea practic simultan în acțiune la nivelul întregului tren diminuând substanțial nivelul reacțiilor dinamice din corpul trenului. În cazul frânei indirecte cu aer comprimat, o influență majoră o are timpul de umplere al cilindrilor de frână, asigurat prin construcția și prin parametrii de funcționare a distribuitorilor de aer. De asemenea, de maximă importanță este tipul de frână, în cazul celei cu saboți din fontă, evoluția forței de frânare pe durata frânării fiind mult dependentă de viteza instantanee de circulație, spre deosebire de cazul utilizării frânei cu disc, a cărei forță de frânare este practic constantă pe durata frânării.

O influență importantă asupra capacității de frânare în condiții de aderență slabă o are și tipul de dispozitive antiblocare, cu care vehiculele sunt echipate. Caracteristicile constructive ale vehiculului influențează și fenomenul de cabraj la care este supus vehiculul în timpul frânării și care determină atât nivelul forțelor verticale care modifică sarcina verticală pe fiecare osie, dar și poziția șasiului vehiculului față de cale, datorită rotației acestuia în plan vertical față de axa transversal - orizontală de simetrie a vehiculului.

După comandarea unei acțiuni de frânare, viteza de circulație începe să scadă deoarece energia cinetică a fiecărui vehicul și deci a trenului în ansamblu, se disipă în primul rând sub formă de căldură, dar și prin lucrul mecanic al forțelor de rezistență la înaintare. Aceste procese se desfășoară cu intensități diferite în diverse locuri din tren. Astfel că între vehiculele componente ale trenului se vor dezvolta forțe care vor acționa asupra aparatelor de ciocnire, tracțiune și legare și se vor transmite în lungul trenului.

Pe baza analizării fenomenelor de natură mecanică care caracterizează dinamica longitudinală a trenului aflat în regim de frânare și pornind de la o serie de ipoteze simplificatoare, corespunzător performanțelor sistemelor de frânare utilizate la vehiculele feroviare motoare, au putut fi stabilite ecuațiile *Karvatchi* ale forțelor maxime dezvoltate pe parcursul acestor faze, iar principalele concluzii la care s-a ajuns arată că reacția longitudinală maximă a trenului este egală cu suma forțelor de frânare excedentare din prima parte a trenului și se produce la sfârșitul primei faze a frânării. În faza a II-a este caracterizată dinamica mișcărilor oscilatorii, trenul fiind în continuare comprimat, iar mișcările oscilatorii se suprapun peste această comprimare.

Bibliografie

- [1] **Drăghici Afanasie, Dinculescu Constantin, Crăsnanu Alexandru**, „Îndrumător de conducere și exploatare a locomotivelor electrice 060 EA”, Centru de documentare și publicații tehnice - MTTc, București, 1990.
- [2] **Voinea R., Voiculescu D., Ceașu V.**, „Mecanică”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1975.
- [3] **Sebeșan Ioan, Mazilu Traian**, „Vibrațiile vehiculelor feroviare” („Vibrations Of The Railway Vehicles”), Editura Matrix Rom, București, 2010.
- [4] **Sireteanu Tudor & others**, „Improving The Hunting Motion Stability By Using The Nonlinear Dissipation Device In Wheelset With Elastic Joints System” in Tehnomus XV 15-th International Conferences Proceeding, pp. 81-86, ISSN-1224-029X, Suceava, 2009.
- [5] **Condacse Nicu**, „Locomotive electrice”, Ministerul Căilor Ferate - Centrul de documentare și publicații tehnice, București, 1966.
- [6] **Dumitru George**, „Mecanica Trenurilor”, ISBN 978-606-25-0484-7, Editura MatrixRom, București, 2019.
- [7] **Dumitru George**, „Studiul influențelor vibrațiilor rotorului motorului electric de tracțiune complet suspendat asupra fenomenului de hunting”, Revista Căilor Ferate Române, nr. 2-4 / 2003.
- [8] **Dumitru George et autres**, „Caracteristiques dynamiques spécifique des locomotives serie BR 182 Siemens 64 U2 ES 1116 Taurus”, Proceedings Of The International Scientific Conference ClBv, Vol. 2, ISSN 1843-6617, pp. 269 - 275, 12-13 November, 2010.
- [9] **Dumitru George & others**, „The Measuring of the Hunting Oscillations Amplitude for Electric Locomotive 060 EA Class To Speeds Between 120 And 210 [km/h]”, The 11th Youth Symposium On Experimental Solid Mechanics, CNCIS, ISSN: 978-606-19-0079-4, pp. 197 – 204, 30th of May 2012 ÷ 2nd of June 2012, Brașov, Romania.
- [10] **Gauss Johann Carl Friedrich**, „Summatio serierum quarundam singularium”, Göttingen, 1811.
- [11] **Germain Sophie**, „Memoir on the Vibrations of Elastic Plate - Referat privind vibrațiile plăcilor elastice”, Paris, 1816.
- [12] **Cauchy Augustin Louis**, „Mémoire sur l'emploi des equations symboliques dans le calcul infinitesimal et dans le calcul aux différences finis - Disertație privind utilizarea ecuațiilor simbolice în calculul infinitesimal și în calculul diferenței finite”, Paris, 1843.
- [13] **Hamilton William Rowan**, „Theory of Systems of Rays”, 1828.
- [14] **Heumann H.**, „Grundzüge der Führung der Schienenfahrzeuge”, Olandenburg - Verlag, 1954.
- [15] **Hilbert David**, „Methoden der Mathematischen Physik” - Vol. 1, 1924 / Vol. 2, 1937.
- [16] **Lagrange Joseph Louis**, „Suite des réflexions sur la résolution algébrique des équations - Reflecții continue asupra rezoluției algebrice a ecuațiilor”, 1771.
- [17] **Pfaff Johann Friedrich**, „Methodus generalis, aequationes differentiarum particularum, necnon aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis inter quocumque variables, complete integrandi”, Berlin, 1814.
- [18] **Poisson Siméon Denis**, „Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques - Memoriu despre propagarea mișcării în medii elastice”, Paris, 1830.
- [19] **Riemann Georg Friedrich Bernhard**, „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse - Funcții cu numere prime”, Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859.
- [20] **Runge Carl David Tolmé**, „Vorlesungen über Numerisches Rechnen - Prelegeri despre calcul numeric”, Berlin, 1924.
- [21] **Sturm Jacques Charles François**, „Mémoire sur la résolution des équations numériques - Disertație privind rezolvarea ecuațiilor numerice”, Paris, 1835.
- [22] **Green George**, „Note on the motion of waves in canals - Notă cu privire la mișcarea undelor în canale”, Cambridge, 1839.
- [23] **Udriște O., Jidveianu V.**, „Locomotive diesel electrice și locomotive electrice”, București, Centrul de documentare și publicații tehnice, M.C.F., 1966.
- [24] **Dumitru George**, „Dinamica Locomotivelor”, ISBN 978-606-25-0770-1, Editura MatrixRom, București, 2022.
- [25] **Dumitru George**, „Locomotive Electrice”, ISBN 978-606-25-0769-1, Editura MatrixRom, București, 2022.
- [26] **Dumitru George**, „Locomotive Diesel”, ISBN 978-606-25-0768-1, Editura MatrixRom, București, 2022.
- [27] **Heumann, K.; Steimel, K.** „Kommutatorloser Bahnmotor mit Pulswechselrichter für Akkumulatortriebwagen” AEG-Mitteilungen 55 (1965), Nr. 3, pp. 220–226.
- [28] **Klingel, J.** „Über den Lauf der Eisenbahnwagen auf gerader Bahn”. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens XX (1883).

- [29] **George Dumitru ș.a.** „*Frecarea și aderența roților fehiculelor feroviare*”, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, vol 10, (2), pp. 79-83, 2019.
- [30] **Curtius, E. W.; Kniffler, A.** „*Neue Erkenntnisse über die Haftung zwischen Treibrad und Schiene*”. Elektrische Bahnen 20 (1944), Nr. 2, pp. 25–29.
- [31] **George Dumitru** „*Locomotive electrice*”, ISBN 978-606-25-0531-8, Editura MatrixRom, București, 2022.
- [32] **George Dumitru ș.a.** „*Zgomotul produs de vehiculele feroviare în curbe*” („The Railway Wheels Squeal Noise On Curves”), în Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, Editura Matrix Rom, ISSN 2068-6331, Vol. 10 (2019), nr. 1, pp. 11-24.
- [33] **Popa Gabriel, Dumitru George ș.a.** „*Aderența osiilor motoare ale vehiculelor feroviare*”, Sinteze de Mecanică Teoretică și Aplicată, vol. 10, (3), pp. 193-202, 2019.