CONSIDERAŢII PRIVIND DINAMICA ACUSTICII ÎN TRACŢIUNEA FEROVIARĂ

CONSIDERATIONS REGARDING THE DYNAMICS OF ACOUSTICS IN RAILWAY TRACTION

George DUMITRU[1], Radu Teodor COSTACHE[2], Mirel UNGUREANU[3]
Elisabeta CRĂCIUN BOJE[4], Alexandra DRAGNEA[5], Adrian DUŢAN[6]

[1]Autoritatea Feroviară Română - Calea Griviței nr. 393, sectorul 1, București, România
e-mail autor: George DUMITRU: george.dumitru.cfr@gmail.com

[2]Rail Cargo Carrier România SRL - str. „Calea Bucureştilor”, nr. 21-25, Otopeni, România:
e-mail Radu Teodor COSTACHE: radu.teodor.costache@gmail.com
[3]Deutsche Bahn Cargo România SRL, str. „sergent Nuţu Ion”, nr. 44, clădirea „One Cotroceni Park Office”, corpul A, etajul 6, CP 050762, sectorul 5, Bucureşti, România, e-mail autor: Mirel UNGUREANU: Mirel.Ungureanu@deutschebahn.com
[4]Autoritatea Feroviară Română - str. „Calea Griviței”, nr. 393, sectorul 1, București, România,
e-mail autor: Elisabeta CRĂCIUN BOJE: elisabetacraciunboje@afer.ro;
[5]Cargo Trans Vagon SA, str. „Vaselor”, nr. 34, sectorul 2, București, România
e-mail autor: Alexandra DRAGNEA: alexandra.dragnea@tts-group.ro,
[6]Grup Feroviar Român SA, str. „Calea Victoriei”, nr. 114, CP 010092, sectorul 1, România,
e-mail: Adrian DUŢAN: adrian_dutan@yahoo.com

Rezumat: *Luând ca referențial geometria spațiului ca mediu de propagare a oscilațiilor acustice raportate la vibrațiile reverberațiilor, mediul de propagare este dependent de timp şi de spațiu. Unda sonoră este explicitată în funcție de suprafața de undă, reprezentative fiind în prezentul studiu de caz, undele sferice. Din punct de vedere mecanic, propagarea undelor sferice este posibilă transversal sau longitudinal, determinările experimentale necesitând cunoașterea direcției de oscilație în mediul de propagare, precum şi natura acestor unde, respectiv elastice așa cum este situația în prezentul studiu de caz. Undele acustice sferice longitudinale sunt cauzate de vibrațiile particulelor de-a lungul direcției de propagare. Sistemul acustic definit de o locomotivă care circulă în remorcarea unui tren şi funcționează în sarcină totală, este format din elemente precum masa acustică (inerția acustică), capacitatea acustică (complianța acustică), rezistența acustică şi impedanța acustică.*
Cuvinte cheie: *impedanță, perturbație, vibrație, oscilație, reverberație, acustic, frecvență, mediu fractal, densitate spectrală, izotrop, complex.*

Abstract: *Taking as a reference the geometry of space as a medium of propagation of acoustic oscillations related to vibrations of reverberations, the medium of propagation is dependent on time and space. The sound wave is explained according to the wave surface, being representative in the present case study, spherical waves. From a mechanical point of view, the propagation of spherical waves is possible transversely or longitudinally, the experimental determinations requiring knowledge of the direction of oscillation in the medium of propagation, as well as the nature of these waves, respectively elastic as is the case in the present case study. Longitudinal spherical acoustic waves are caused by particle vibrations along the direction of propagation. The acoustic system defined by a locomotive running towing a train and operating at full load, consists of elements such as acoustic mass (acoustic inertia), acoustic capacity (acoustic compliance), acoustic resistance and acoustic impedance.*
Keywords: *impedance, disturbance, vibration, oscillation, reverberation, acoustic, frequency, fractal environment, spectral density, isotropic, complex.*

1. INTRODUCERE

Timpul de reverberaţie [1] este definit ca parametru fundamental de natură acustică şi are o rată de descreştere măsurată prin regresia liniară a celor mai mici pătrate ale curbei de descreştere. Timpul de descreştere (amortizare) timpurie (EDT - „Early Decay Time") [2] reprezintă timpul necesar ca nivelul presiunii sonore să scadă cu 10 [dB] după ce sursa sonoră a fost oprită. „TrebleRatio" (TR) sau luminozitatea sunetului [3], reflectă „bogăția" armonică a frecvențelor ridicate și caracterizează mediul de propagare a undelor acustice pentru consolidarea sunetelor de frecvență ridicată (figura nr. 1). Orice curbă fractală acustică [4] a unui spațiu fractal acustic este dependentă direct de scala de rezoluție acustică δt, lungimea curbei fractale acustice devenind infinită atunci când intervalul temporal Δt este nul (Δt=0), spațiul tridimensional asociat devenind astfel un fractal în sens Mandelbrot, factorul timp nefiind un fractal, devine parametru afin al curbei fractale acustice şi atunci, conform principiului substituției acustice, scala de rezoluție δt se identifică cu diferențiala temporală dt, adică $\delta t \equiv dt$ şi cazul dinamicii sistemelor hamiltoniene [5], dt devine o variabilă independentă de mişcare [6].

2. DETERMINAREA ECUAȚIEI DE MIȘCARE NAVIER-STOKES GENERALIZATĂ PRIVIND CONSERVAREA DENSITĂȚII ACUSTICE

În situația ruperii spontane a invarianței infinitezimale temporale acustice, a oricărui câmp acustic Φ, atunci derivata câmpului acustic Φ în raport cu timpul [7] capătă expresia:

$$\left[\frac{d\Phi}{dt}\right]_{+} = \lim_{\Delta t \to 0_{+}} \frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \left[\frac{d\Phi}{dt}\right]_{-} = \lim_{\Delta t \to 0_{-}} \frac{\Phi(t)-\Phi(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

Echivalența precedentă este posibilă doar în cazul diferențiabil, rămânând invariante la transformarea $\Delta t \to -\Delta t$, iar în cazul fractal, această echivalență își pierde valabilitatea întrucât pentru $\Delta t \to 0_{\pm}$, cele două ecuații nu sunt definite. Funcționalitatea acestor reasigurându-se prin înlocuirea câmpului acustic clasic $\Phi = \Phi\left(X^{i}, t\right)$ cu un câmp acustic fractal $\Phi = \Phi\left(X^{i}, t, dt\right)$. Această nouă situație care implică dependența câmpului acustic Φ atât de coordonatele spațiale X^{i} și de coordonata temporală t, cât și de scala de rezoluție dt, impune efectuarea următoarelor substituții:

$$\frac{d_{+}\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0_{+}} \frac{\Phi(t+\Delta t, \Delta t)-\Phi(t, \Delta t)}{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{d_{-}\Phi}{dt}_{-} = \lim_{\Delta t \to 0_{-}} \frac{\Phi(t, \Delta t)-\Phi(t-\Delta t, \Delta t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Diferențiala câmpului acustic de coordonate $X^{i}(t, dt)$, cu $i = 1,2,..,n$ cunoaște expresia matematică următoare:

$$d_{\pm}X^{i}(t, \Delta t) = d_{\pm}x^{i}(t) + d_{\pm}\xi^{i}(t, dt) \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_{+}+d_{-}}{dt}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{d_{+}-d_{-}}{dt}\right) \quad (3)$$

unde: ultima ecuație reprezintă expresia ecuației fractale acustice, iar factorul $d_{\pm}x^{i}$ definește componenta diferențiabilă și independentă de scala de rezoluție acustică a câmpului de coordonate acustic, în timp ce factorul $d_{\pm}\xi^{i}$ definește componenta fractală și dependentă de scala de rezoluție acustică a aceluiași câmp de coordonate acustic.

Operatorul fractal acustic $\partial / \Delta t$ are expresia:

$$\frac{\hat{d}}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d_{+}+d_{-}}{dt}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{d_{+}-d_{-}}{dt}\right) \tag{4}$$

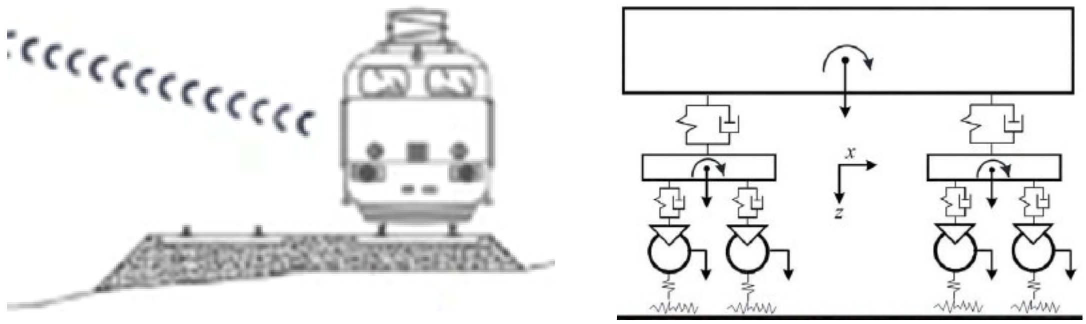

Fig. 1. Modelul dinamic simplificat al sursei de unde acustice propagate în mediul ambiant (vehiculul feroviar care circulă pe calea de rulare)

Câmpul vitezelor complexe acustice [8] se obține prin aplicarea operatorului fractal, câmpului acustic de coordonate V^i, în care componenta reală a câmpului vitezelor complexe acustice, V^i este diferențiabilă și independentă de rezoluția de scală acustică, în timp ce componenta imaginară a câmpului vitezelor complexe acustice, U^i, este fractală și dependentă de rezoluția de scală acustică. Dacă o curbă fractală acustică pe un spațiu fractal acustic având X^i componentele vectorului de poziție acustic al unui punct de pe curba fractală acustică, este o funcție de câmp acustic de forma $Q\left(X^i,t\right)$, de clasă cel puțin C_0, monogenă și continuă pe întregul domeniu de definiție, atunci prin dezvoltarea acesteia în serie Taylor [9] se obține expresia derivatei covariante fractale:

$$\begin{aligned} dQ &= Q\left(X^i+dX^i,t+dt\right)-Q\left(X^i,t\right)= \\ &=\left(\partial_t dt+\partial_i dX^i\right)Q\left(X^i,t\right)+\frac{1}{2}\left(\partial_t dt+\partial_i dX^i\right)^2 Q\left(X^i,t\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Dezvoltarea în serie Taylor [10] este valabilă în orice punct al spațiului varietății tridimensionale și pentru toate punctele curbei fractale acustice [11], dar selectând doar punctele de pe curbele fractale acustice, atunci scufundarea pe varietatea spațială tridimensională fractală acustică, conduce la următoarea expresie a derivatei covariante fractale:

$$d_{\pm}Q=\partial_t Q dt+\partial_i Q d_{\pm}X^i+\frac{1}{2}\partial_{tt}^2 Q dt^2+\partial_t\partial_i Q d_{\pm}X^i dt+\frac{1}{2}\partial_i\partial_l Q d_{\pm}X^i d_{\pm}X^l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d_{\pm}}{dt}=\partial_t+v_{\pm}^i\partial_i+\frac{1}{2}\mu_{\pm}^i\mu_{\pm}^l(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i\partial_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\hat{d}}{dt}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d_{+}+d_{-}}{dt}\right)-i\left(\frac{d_{+}-d_{-}}{dt}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\partial_t+v_{+}^i\partial_i+\frac{1}{2}\mu_{+}^i\mu_{+}^l(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i\partial_l\right]+\left[\partial_t+v_{-}^i\partial_i-\frac{1}{2}\mu_{-}^i\mu_{-}^l(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i\partial_l\right]\right\}-$$

$$-\frac{i}{2}\left\{\left[\partial_t + v_+^i\partial_i + \frac{1}{2}\mu_+^i\mu_+^l(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i\partial_l\right] + \left[\partial_t + v_-^i\partial_i - \frac{1}{2}\mu_-^i\mu_-^l(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i\partial_l\right]\right\} =$$
$$= \partial_t + \left(\frac{v_+^i + v_-^i}{2} - i\frac{v_+^i + v_-^i}{2}\right)\partial_i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}\left[\left(\mu_+^i\mu_+^l - \mu_-^i\mu_-^l\right) - \left(\mu_+^i\mu_+^l - \mu_-^i\mu_-^l\right)\right]\cdot\partial_i\partial_l = \qquad (6)$$
$$= \partial_t + \hat{V}^i\partial_i + \frac{1}{4}dt^{(2/D_F)-1}D^{il}\partial_i\partial_l.$$

unde factorul $\mu_\pm^i$ reprezintă un coeficient constant iar D_F este dimensiunea fractală în sens *Hausdorff*, iar: $D^{il} = d^{il} - i\bar{d}^{il}$; $d^{il} = \mu_+^i\mu_+^l - \mu_-^i\mu_-^l$ și $\bar{d}^{il} = \mu_+^i\mu_+^l - \mu_-^i\mu_-^l \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\hat{d}}{dt} = \partial_t + \hat{V}^i\partial_i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}D^{il}\partial_i\partial_l.$$

În consecință, expresia matematică a impulsului acustic generalizat al unității de masă capătă forma următoare:

$$\frac{\hat{d}\hat{V}^i}{dt} = \partial_t\hat{V}^i + \hat{V}^l\partial_l\hat{V}^i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}D^{lk}\partial_l\partial_k\hat{V}^i = 0 \qquad (7)$$

Totodată, accelerația acustică locală, convecția acustică și disipația acustică își fac echilibru în orice punct al traiectoriei de mișcare al unităților structurale acustice. De asemenea, prezența accelerațiilor complexe acustice, a vitezei complexe acustice și a coeficientului de tip vâscozitate complexă acustică, specifică faptul că mediul de propagare al undelor acustice considerat fluid fractal acustic, are proprietăți reologice iar prin separarea mișcărilor unităților structurale acustice pe scale de rezoluție acustice rezultă legea de conservare a impulsului acustic specific generalizat pentru scala de rezoluție acustică diferențială:

$$\frac{\hat{d}V^i}{dt} = \partial_t V^i + V^l\partial_l V^i - U^l\partial_l U^i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}d^{kl}\partial_k\partial_l V^i - \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}\bar{d}^{kl}\partial_k\partial_l V^i = 0 \qquad (8)$$

respectiv, legea de conservare a impulsului acustic specific generalizat pentru scala de rezoluție acustică fractală:

$$\frac{\hat{d}U^i}{dt} = \partial_t U^i + V^l\partial_l U^i - U^l\partial_l V^i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}d^{kl}\partial_k\partial_l U^i - \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}\bar{d}^{kl}\partial_k\partial_l V^i = 0 \qquad (9)$$

De asemenea, prin aplicarea derivatei covariante acustice asupra densității acustice de stări ρ se obține legea de conservare a densității de stări acustice după cum urmează:

$$\frac{\hat{d}\rho}{dt} = \partial_t\rho + \hat{V}^l\partial_l\rho + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}D^{lk}\partial_l\partial_k\rho = 0 \qquad (10)$$

Prin separarea mișcărilor pe scale de rezoluție rezultă legea de conservare a densității acustice de stări pentru scala de rezoluție acustică diferențială:

$$\partial_t\rho + V^l\partial_l\rho + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}D^{lk}\partial_l\partial_k\rho = 0 \qquad (11)$$

respectiv, legea de conservare a densității acustice de stări pentru scala de rezoluție acustică fractală, astfel:

$$U^l\partial_t\rho + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1}\bar{d}^{lk}\partial_l\partial_k\rho = 0 \qquad (12)$$

Ultimele două expresii definesc ecuațiile hidrodinamicii fractale acustice [12] pentru câmpuri de viteze complexe acustice și respectiv pentru câmpuri de viteze reale (adică pentru mișcări ale unității structurale acustice ale sistemelor complexe acustice, separate pe scale de rezoluție acustice). Dacă asupra mediului fractal se exercită atât forțe de suprafață fractale respectiv forțe de tracțiune fractale și forțe volumice fractale, atunci derivata în timp (derivata covariantă acustică) a impulsului acustic specific generalizat va cunoaște următoare expresie:

$$\frac{\hat{d}}{dt}\int \rho \hat{V}_i d\hat{V} = \int_{\Sigma,} \hat{T}_i d\hat{\Sigma} + \int_V \rho \hat{f}_i d\hat{V} \tag{13}$$

Forța de tracțiune fractală este dependentă de tensorul de ordinul doi al tensiunilor fractale și de versorul normal fractal în raport cu suprafața $d\Sigma$, atunci făcând substituția:

$$\frac{\hat{d}}{dt}\int \rho \hat{V}_i d\hat{V} = \int_{\Sigma,,} \hat{\sigma}_{il} \hat{n}_l d\hat{\Sigma} + \int_V \rho \hat{f}_i d\hat{V} \tag{14}$$

și aplicând teorema *Green* integralei fractale [13] de suprafață și presupunând că sub acțiunea câmpului forțelor fractale volumul mediului fractal nu se modifică, rezultă:

$$\int \frac{\hat{d}}{dt}\left(\rho \hat{V}_i\right) dV = \int \partial_l \hat{\sigma}_{il} d\hat{V} + \int \rho \hat{f}_i d\hat{V} \tag{15}$$

Dacă se impune condiția de incompresibilitate $\partial_i \hat{V}_i = 0$, rezultă:

$$\int \left[\partial_t \left(\rho \hat{V}_i\right) + \partial_l \left(\hat{V}_i \hat{V}_l\right) + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1} D^{lk} \partial_l \partial_k \left(\rho \hat{V}_i\right) - \partial_l \hat{\sigma}_{il} - \rho \hat{f}_i \right] d\hat{V} = 0 \tag{16}$$

Ultima ecuație este satisfăcută dacă și numai dacă este îndeplinită condiția următoare:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left(\rho V_i\right) + \partial_l \left(\hat{V}_i \hat{V}_l\right) + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1} D^{lk} \partial_l \partial_k \left(\rho \hat{V}_i\right) - \partial_l \hat{\sigma}_{il} - \rho \hat{f}_i = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho \partial_t \hat{V}_i + \rho \hat{V}_l \partial_l \hat{V}_i + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1} \rho D^{lk} \partial_l \partial_k \hat{V}_i - \partial_l \hat{\sigma}_{il} - \rho \hat{f}_i + \\
&+ \hat{V}_i \left[\partial_t \rho + \partial_1 \rho \hat{V}_l + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1} D^{lk} \partial_l \partial_k \rho \right] = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \partial_t \hat{V}_i + \hat{V}_l \partial_l \hat{V}_l + \frac{1}{4}(dt)^{(2/D_F)-1} \rho D^{lk} \partial_l \partial_k \hat{V}_i = \rho^{-1} \partial_l \hat{\sigma}_{il} + \hat{f}_i
\end{aligned} \tag{17}$$

unde: ultima ecuație reprezintă expresia matematică a legii de conservare Navier-Stokes a densității acustice.

3. APLICAȚII ALE TEOREMEI HELMHOLTZ PENTRU DETERMINAREA ECUAȚIEI SCHRÖDINGER A VITEZEI ACUSTICE ÎNTR-UN MEDIU DE PROPAGARE DAT PENTRU UN CÂMP DE UNDE

Dacă mediul elastic fractal este liniar [14] și izotrop, atunci deformațiile sunt mici comparativ cu o dimensiune minimă relevantă a mediului de propagare a undelor acustice și atunci, tensorul deformațiilor fractale $\hat{\varphi}_{il}$ se raportează la câmpul de deplasări nediferențiabile R_i prin intermediul mediei lui $R_i, l = \partial_l \cdot R_i$ astfel:

$$\hat{\varphi}_{il} = \frac{1}{2}\left(R_{i,l} + R_{l,i}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_l R_i + \partial_i R_l\right) \tag{18}$$

Conform prevedrilor legii *Hooke* fractale, generalizate [15], tensorul tensiunilor fractale $\hat{\sigma}_{il}$ poate fi corelat cu tensorul deformațiilor fractale $\hat{\varphi}_{il}$ și pseudotensorul lui Kronecker $\hat{\partial}_{il}$

unde: $\hat{\sigma}_{il} = \hat{\lambda}\hat{\theta}\delta_{il} + 2\hat{\mu}\hat{\varphi}_{il} \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\varphi}_{kk} = \hat{\varphi}_{11} + \hat{\varphi}_{22} + \hat{\varphi}_{33}$ iar $\hat{\lambda}$ și $\hat{\mu}$ sunt coeficienți fractali de tip *Lamée* iar:

$$\hat{\delta}_{il} = \begin{cases} 1\,pentru \quad i = l \\ 0\,pentru \quad i \neq l \end{cases}$$

În cazul unei stări de tensiuni unidimensionale fractale, cu ajutorul trasei tensorului, se va determina dependența funcțională, astfel:

$$\hat{S} = \hat{\sigma}_{kk} = \hat{\sigma}_{11} + \hat{\sigma}_{22} + \hat{\sigma}_{33} = \hat{\lambda}\hat{\theta}\delta_{kk} + 2\hat{\mu}\hat{\varphi}_{kk} = \left(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)\hat{\theta} \tag{19}$$

Dar: $\hat{\varphi}_{il} = \hat{\varphi}_{il}(\hat{\sigma}_{il})$; $\hat{\sigma}_{11} \neq 0$; $\hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21} = \hat{\sigma}_{13} = \hat{\sigma}_{31} = \hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} = \hat{\sigma}_{22} = \hat{\sigma}_{33} = 0$;

$$\hat{\varphi}_{11} = \frac{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}{\hat{\mu}\left(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)}\hat{\sigma}_{11} \text{ și } \hat{\sigma}_{11} = \hat{\sigma}_{11}(\hat{\varphi}_{11}) \Rightarrow \hat{\sigma}_{11} = \frac{\hat{\mu}\left(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)}{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}\hat{\varphi}_{11} \Rightarrow$$

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mu}\left(3\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)}{\hat{\lambda} + \hat{\mu}};\ \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{11};\ \hat{\varphi} = \hat{\varphi}_{11}$$

unde: $\hat{E}$ reprezintă modulul fractal de tip *Young*.

Dacă deformațiile unui mediu elastic fractal sunt mici comparativ cu o dimensiune minimă relevantă a unui astfel de mediu şi atunci, neglijând termenii de ordinul doi şi efectuând substituțiile necesare, se obține ecuația fractală *Navier – Stokes* [16]:

$$\rho^{-1}\left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\partial_i\partial_l R_l + \rho^{-1}\partial_l\partial_i R_i + \hat{f}_i = \partial_t\partial_t R_i \tag{20}$$

în care, în absența forțelor volumice fractale $\hat{f} \equiv 0$ și utilizând operatorii gradient (∇), divergență $(\nabla.)$ și *Laplacian* $\left(\nabla^2 \equiv \Delta\right)$ [17] coroborat cu extinderea teoremei *Helmholtz* [18] de descompunere a unui vector clasic la descompunerea unui vector fractal R, rezultă:

$$\left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\nabla(\nabla R) + \mu\Delta R = \rho\frac{\partial^2 R}{\partial_{t^2}} \Rightarrow R = \nabla\varphi + \nabla X\Psi \tag{21}$$

unde: φ este o funcție scalară complexă, iar Ψ este o funcție vectorială complexă, în care:

$$\begin{aligned} &\nabla\Psi = 0 \Rightarrow \left(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\right)\nabla\left[\nabla\cdot(\nabla\varphi + \nabla X\Psi)\right] + \hat{\mu}\Delta(\nabla\varphi + \nabla X\Psi) = \xi\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\varphi + \nabla X\Psi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla\left[\left(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)\nabla\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + \nabla x\left(\mu\Delta\Psi - \xi\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right) = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Ultima ecuație (*Helmholtz*) este satisfăcută dacă şi numai dacă sunt îndeplinite concomitent fiecare din următoarele două condiţii:

$$\left(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\right)\nabla\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0\xi\nabla \text{ și } \hat{\mu}\Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \tag{23}$$

Vitezele specifice fractale c_p longitudinale şi respectiv c_s transverale de propagare a undelor fractale longitudinale şi transversale în aproximația micilor deformații ale unui mediu elastic fractal, în câmp scalar complex φ și în câmp vectorial complex Ψ, sunt componente ale aceluiași câmp fractal de deformații unde, dacă fractalitatea curbei de mișcare se realizează prin procese stohastice, atunci legea de conservare a impulsului acustic specific generalizat are următoare expresie:

$$\frac{\hat{d}\hat{V}^i}{dt} = \partial_t \hat{V}^i + \hat{V}^l \partial_l \hat{V}^i - i\frac{\mu}{2}(dt)^{(2/D_F)-1}\partial^l \partial_l \hat{V}^i = 0 \qquad (24)$$

iar prin separarea scalelor de rezoluție acustice (diferențială de cea fractală) se obțin expresiile următoare:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{d}V^i}{dt} &= \partial_t V^i + V^l \partial_l V^i - \left[U^l + \frac{\mu}{2}(dt)^{(2/D_F)-1}\partial^l\right]\left[\partial_l U^i\right] = 0 \\
\frac{\hat{d}U^i}{dt} &= \partial_t U^i + V^l \partial_l U^i - \left[U^l + \frac{\mu}{2}(dt)^{(2/D_F)-1}\partial^l\right]\left[\partial_l V^i\right] = 0
\end{aligned} \qquad (25)$$

În eventualitatea că în câmpul vitezelor complexe acustice se manifestă absența vârtejurilor, atunci acest câmp este irotaţional [19] și atunci acesta se exprimă prin gradientul unei funcții scalare complexe, denumit potențialul scalar acustic al câmpului de viteze complexe acustice și cunoaște următoarea formă:

$$\begin{aligned}
&\hat{V}^i = i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_i \ln\Psi \Rightarrow \frac{\hat{d}V^i}{dt} = i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_t\partial_i \ln\Psi + \\
&+\left[i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial^l \ln\Psi - i\frac{\mu}{2}(dt)^{(2/D_F)-1}\partial^l\right] i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_l\partial_i \ln\Psi = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \partial_i\left(\partial_l \ln\Psi\partial^l \ln\Psi\right) == 2\partial^l \ln\Psi\partial_i\partial_l \ln\Psi \Rightarrow \partial_i\partial_l\partial^l \ln\Psi = \partial^l\partial_i\partial_l \ln\Psi \Rightarrow \\
&\Rightarrow \partial_i\left(\partial_l \ln\Psi\partial^l \ln\Psi + \partial_l\partial^l \ln\Psi\partial^l\right) = \partial_i\left(\frac{\partial_l\partial^l\Psi}{\Psi}\right) \Rightarrow \\
&\Rightarrow i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_t\partial_i \ln\Psi + \mu^2(dt)^{(4/D_F)-2}\partial_i\left(\frac{\partial_l\partial^l\Psi}{\Psi}\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \mu^2(dt)^{(4/D_F)-2}\partial_l\partial^l\Psi + i\mu(dt)^{(2/D_F)-1}\partial_t\Psi = 0
\end{aligned} \qquad (26)$$

Ultima ecuație reprezintă forma simplificată a ecuației *Schrödinger* [20] pentru faza funcției vectoriale complexe Ψ în câmp vectorial complex, a vitezei acustice într-un mediu de propagare dat pentru un câmp de unde acustice.

Ținând seama de diferențele acustice emise de diferite cuple de materiale [21-22] și având în vedere complexitatea acestor calcule matematice se pot utiliza soluții moderne, materializate în produse software, ce pot facilita realizarea calculelor și semnalizarea apariției eventualelor situații de risc în cazul managementului acestor procese de monitorizare folosind acustica în transporturile feroviare [23-28]. Aceste soluții moderne ce răspund noului trend al digitalizării, softurile de monitorizare, bazate pe infrastructura informatică și inteligența artificială vor permite, prin implementare, ca și în cazul altor probleme de ordin tehnic, luarea unor decizii manageriale în timp real [29-32]. De asemenea, este foarte importantă activitatea de stocare a istoricului datelor, care pot fi codificate prin coduri de răspândire utilizate în tehnicile de acces multiple în scopuri IoT [33-34], pentru diverse activități și situații critice pentru o analiză eficientă și astfel de efectuare de intervenții preventive și predictive.

CONCLUZII

Dacă varietatea spațială este fractală, atunci dinamica sistemului complex acustic va opera cu un singur câmp acustic al vitezelor complexe acustice sau cu două câmpuri reale de viteze acustice, respectiv câmpurile corespunzătoare componentei reale și ale componentei imaginare ale aceluiași câmp al vitezelor complexe acustice. Între oricare două puncte ale unui spațiu fractal acustic există o infinitate de traiectorii.

Tranziția de la acustica compatibilă cu mișcările acustice pe curbe continue și diferențiabile, la acustica fractală, respectiv la cea compatibilă cu mișcările pe curbe continue și nediferențiabile, se obține prin substituirea operatorului standard *d/dt* prin aplicarea derivatei covariante acustice, câmpului vitezelor complexe acustice, rezultând astfel legea de conservare a impulsului acustic specific generalizat, adică impulsul acustic generalizat al unității de masă.

Timpul de reverberație [35] este cel mai important parametru acustic și este determinat de volumul și natura mediului de propagare a câmpului de unde acustice, precum şi de geometria spațiului de propagare, care este de natură să influențeze viteza de determinare a coeficientului de absorbție acustică a mediului precum și a coeficientului de absorbţie a undelor sonore, care reprezintă un parametru deosebit de important pentru caracterizarea şi stabilirea densității spectrale acustice care la rândul lor, influențează luminozitatea sunetului ce reflectă „bogăția" armonică la frecvențe ridicate a sunetului [36].

Analiza fractală a fenomenului de propagare a sunetului într-un mediu de propagare dat, ține seama de complexitatea situațiilor care pot apărea în procesul de propagare a sunetului, notabile nefiind particularitățile de propagare acustică într-un mediu continuu coroborat cu acceptarea principului covarianţei acustice, de natură să permită verificarea legilor de conservare a impulsului acustic specific sau generalizat la scale de rezoluție distincte, cu posibilitatea stabilirii dependenței coeficientului de absorbție a unui mediu fractal de propagare, de frecvența undei acustice, care depinde de caracteristicile sistemului sursă - mediu.

BIBLIOGRAFIE

[1] **B. Ivancevic, K. Jambrosic, M. Maletic,** „*Characteristics of Reverberation Time Measuring Signals*", Proceedings of the 44th ELMAR Conference, Zadar, Croatia (2002), 8, pages 8-93.
[2] **M. Barron,** „*Interpretation of Early Decay Times in Concert Auditoria*", Acustica vol. 81 (1995), pages 320-331.
[3] **E.G. Boring, S.S. Stevens**, „*The nature of tonal brightness*", Psychology: Boring and Stevens, vol. 22, 1936, pages 514-521.
[4] **J. Ding, L. Fan, S Zhang, H. Zhang, W. Yu,** „*Simultaneous realization of slow and fast acoustic waves using a fractal structure of Koch curve*", Scientific Reports, 2018.
[5] **M. Grigorescu,** „*Simetrii Dinamice*", Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, București, România 2013.
[6] **J. Schneider, T. Tél, Z. Neufeld,** „*Dynamics of "leaking" Hamiltonian systems*", PHYSICAL REVIEW E 66, 066218 ~2002, pages 1-6.
[7] **B.A. Auld,** „*Acoustic fields and waves in solids*", 1973, books.google.com.
[8] **B. Piwakowski and B. Delannoy,** „*Method for computing spatial pulse response: Time-domain approach*", The Journal of the Acoustical Society of America, Volume 86, Issue 6, 2422 (1989).
[9] **H. Askes, E.C. Aifantis**, „*Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results*", International Journal of Solids and Structures, Volume 8. No.13, 2011, pages 1962-1990.

[10] **A. Hadar, C. Marin, C. Petre, A. Voicu**, „*Metode numerice în inginerie*”, Politehnica Press, București, România 2004.

[11] **J.J. Trujillo, M. Rivero, B. Bonill**a, „*On a Riemann-Liouville generalized Taylor's f*ormula”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 231, No.1. 1999, pages 255-265.

[12] **V.E. Tarasov,** „*Acoustic waves in fractal media: Non-integer dimensional spaces approach*”, Wave Motion ,Volume 63, June 2016, pages 18-22.

[13] **F. Mendivil, E.R. Vrscay,** „Fractal vector measures and vector calculus on planar fractal domains”, Chaos, Solitons & Fractals, Volume 14, Issue 8, November 2002, pages 1239-1254.

[14] **V.E. Tarasov,** „*Vector calculus in non-integer dimensional space and its applications to fractal media*”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 20. No.2, 2015, pages 360-374.

[15] **M. Ostoja-Starzewski, J. Li, H. Joumaa, P.N. Demmie,** „*From fractal media to continuum mechanic*s”, ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik”,Volume 94, Issue 5: Second Gradient and Generalized Continua, May 2014, pages 365-448.

[16] **V.V. Chepyzhov, A.A. Il Lyin,** „*On the Fractal Dimension of Invariant Sets; Applications to Navier–Stokes Equations*”, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 10, Numbers 1& 2, January & March 2004, pages 117–135.

[17] **M. Fărcăsanu,** „*O analiza variațională a unor clase de ecuații integrale și diferențiale: probleme de valori proprii și probleme de tip torsiona creepl*”, Universitatea din Craiova, Școala Doctorală de Științe, Domeniul Matematică, Teză de doctorat 2018.

[18] **N.E. Fântână,** „*Contribuţii privind analiza şi reducerea zgomotelor şi vibraţiilor produse de motoarele autovehiculelor*”, Universitatea “Politehnica” din Timişoara, Facultatea de Mecanică, Catedra de Mecanică și Vibrații, Teză de doctorat, 2011.

[19] **G. Dumitru,** „*Dinamica Locomotivelor*”, ISBN 978-606-25-0770-1, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2022.

[20] **J.H. Tan, G.L.Snider, L.D. Chang, E.L. Hu** „*A self-consistent solution of Schrödinger – Poisson equations using a nonuniform mesh*”, Appl. Phis., v. 68, nr. 8, 15 oct. 1990, pages 4071- 4076.

[21] **G. Dumitru,** „*Locomotive Electrice*”, ISBN 978-606-25-0769-1, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2022.

[22] **G. Dumitru,** „*Locomotive Diesel*”, ISBN 978-606-25-0768-1, Editura MatrixRom, Bucureşti, 2022.

[23] **A. Neacşa, D.B. Stoica,** *„*Aspects concerning the software applications in order to determine the technological systems reliability*”,* MOCM The 13th International Conference of Fracture Mechanics, 4 (13), 2007.

[24] **A. Neacșa, N.N. Antonescu, D.B. Stoica,** *„Software Applications for Complex Technological Systems Reliability”,* Journal of the Balkan Tribological Association, 15 (1), 2009.

[25] **A. Neacşa, N.N. Antonescu, D.B. Stoica,** *„Modern Solutions for Selecting the Corresponding Machinery Dedicated to Technological Applications”,* Journal of the Balkan Tribological Association, 15 (4), 2009.

[26] **C.N. Eparu, S. Neacșu, A. Neacșa,** *„Correlation of Gas Quality with Hydrodynamic Parameters in Transmission Networks”*, MATEC Web of Conferences, 290 (1), 2019.

[27] **C.N. Eparu, S. Neacșu, A.P. Prundurel, R. Rădulescu, A. Neacșa,** *„Behaviour of transmission and distribution networks with big consumption, the stress test”,* IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 595 (1), 2019.

[28] **N.N. Antonescu, M.I.A. Naboulsi, M.G. Petrescu, A. Neacșa,** *„Behaviour of Metal-Rubber Couplings or any other Plastic Materials in Translational Motion under Wear Generating Conditions”*, Journal of the Balkan Tribological Association, 12 (4), 2006.

[29] **A. Neacșa, D.B. Stoica, N.N. Antonescu,** *„Studies on the Use of Implemented Databases on Web Platforms in Order to Verify Machines Compatibility with Working Conditions”,* Journal of the Balkan Tribological Association, 18 (4), 2014.

[30] **M.G. Petrescu, A. Neacșa, A. Diniță,** *„The Risk Management and the Decisional Activity”,* Annales Universitatis Apulensis Series Oeconomica 3 (8), 2006.

[31] **C.N. Eparu, A. Neacșa, A.P. Prundurel, R. Rădulescu, C. Slujitoru, N. Toma, M. Nițulescu,** *„Analysis of a high-pressure screw compressor performances”*, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 595 (1), 2010.

[32] **C.N. Eparu, S. Neacșu, A. Neacșa, A.P. Prundurel,** *„The comparative thermodynamic analysis of compressor's energetic performance”*, Mathematical Modelling of Engineering Problems, 6 (1), 2019.

[33] **A. Badea, S. Halunga, M. Găină, C. Capotă, E. Stancu,** *„Influence of Manchester encoding over spreading codes used in multiple access techniques for IoT purposes”*, IEEE 25th International Symposium for Design and Technology in Electronic Packaging (SIITME), 2019. INSPEC Accession Number: 19359199, DOI: 10.1109/SIITME47687.2019.8990780, Publisher: IEEE.

[34] **A. Badea, M.G. Berceanu, C. Florea, S. Halunga,** „*The performance of Manchester source coding in an uplink LDPC channel coding OFDM-based Massive MIMO system*”, CONFERENCE ATOM-N 2020, Friday, August 21, Oral Presentation, O Session, OMN100-108, - ibn.idsi.md.

[35] **K. Jambrosic, M. Horvat, H. Domitrovic,** „*Reverberation time measuring methods*”, Acoustics 08 Paris, 2008, pages, 4503-4508.

[36] **D.T. Sylvander,** „*Impactul mediului acustic asupra comunicării în sala de clasă*”, Revista Română de Terapia Tulburărilor de Limbaj şi Comunicare no. 1, 2016, pages 77-87.